Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

Verifica delle competenze preliminari.

(i) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni x appartenente al dominio della funzione, se $x < M$ allora $|f(x) + \pi| < \varepsilon$.

(ii) Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,\log(2x) + \operatorname{sen}(3x^2 + 4x)}{5x}$

$= \frac{4}{5}$

(iii) Si calcoli la derivata della funzione $\displaystyle f(x) = \int_x^1 \operatorname{arctg}\,(t^2)\,dt + \frac{\operatorname{arctg}\,(x)}{x}$.

$$f'(x) = -\operatorname{arctg}\,(x^2) + \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}\,(x)}{x^2}$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_1^e \big(x^{-1} - 2\log(2x)\big)\,dx$

Una primitiva della funzione $\log(2x)$ è $x\log(2x) - x$, come si calcola facilmente per parti. L'integrale richiesto vale pertanto

$$= 2(1-e)\log(2e) - 1$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da da $f(x) = x\, 2^{-|x+1|}$.

(i) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$0, 0$.

(ii) Si calcolino, se possibile, f' e f''.

Se $x > -1$ si ha $f'(x) = 2^{-x-1}\big(1 - x\log(2)\big)$; $f''(x) = -2^{-x-1}\log(2)\big(2 - x\log(2)\big)$.

Se $x < -1$ si ha $f'(x) = 2^{x+1}\big(1 + x\log(2)\big)$; $f''(x) = 2^{x+1}\log(2)\big(2 + x\log(2)\big)$.

La funzione non è derivabile in -1.

(iii) Si determinino i punti critici di f e si studi l'esistenza di punti di minimo/massimo relativi e assoluti. Si descrivano inoltre gli intervalli di monotonia della funzione.

Punti critici $\frac{1}{\log(2)}$ e $-\frac{1}{\log(2)}$ (si osservi che $-\frac{1}{\log(2)} < -1$). La funzione è decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{\log(2)}]$ e su $[\frac{1}{\log(2)}, +\infty[$; è crescente su $[-\frac{1}{\log(2)}, \frac{1}{\log(2)}]$. $\min f = f(-\frac{1}{\log(2)})$, $\max f = f(\frac{1}{\log(2)})$.

(iv) Si studino gli intervalli di convessità/concavità di f e si determini l'esistenza di eventuali punti di flesso ascendente/discendente.

La funzione è concava su $]-\infty, -\frac{2}{\log(2)}]$ e su $[-1, \frac{2}{\log(2)}]$; è convessa su $[-\frac{2}{\log(2)}, -1]$ e su $[\frac{2}{\log(2)}, +\infty[$.

I punti $-\frac{2}{\log(2)}$ e $\frac{2}{\log(2)}$ sono di flesso ascendente. Si noti che c'è un cambio di concavità in -1, ma -1 non è un punto di flesso perché f non è derivabile in -1.

(v) Si disegni un grafico approssimativo della funzione e si stabilisca in particolare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) + 1 = 0$.

L'equazione ha due soluzioni. Infatti, $f(-1) = -1$ e la funzione ha un punto di minimo in $-\frac{1}{\log(2)} < -1$, dove necessariamente $f(-\frac{1}{\log(2)}) < -1$. D'altra parte la funzione tende a 0 quando $x \to -\infty$. Pertanto ci sarà una seconda soluzione nell'intervallo $]-\infty, -\frac{1}{\log(2)}[$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to]-3,3[$ una funzione derivabile, dispari, e tale che $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 1$.

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(x)\,\varphi(x)^2 + \varphi'(x)}{\varphi(x)^2 - 9}\,dx$$

Con il cambio di variabile $y = \varphi(x)$ si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(x)\,\varphi(x)^2 + \varphi'(x)}{\varphi(x)^2 - 9}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-9}\,dy = \int_{-2}^{2} \Big(1 + \frac{5}{3}\Big(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y+3}\Big)\Big)\,dy = 4 - \frac{10}{3}\log 5.$$

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(x)\,\varphi(x)^2 + \varphi(x)}{\varphi(x)^2 - 9}\,dx$$

Si separano i due addendi e si osserva che il secondo addendo è l'integrale su un intervallo simmetrico di una funzione dispari, quindi vale 0; si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(x)\,\varphi(x)^2 + \varphi(x)}{\varphi(x)^2 - 9}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{y^2}{y^2-9}\,dy + 0 = 4 - 3\log 5.$$

(iii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{2} \frac{\varphi'\big(\sqrt{3-x}\big)}{\sqrt{3-x}}\,dx.$$

Con il cambio di variabile $y = \sqrt{3-x}$ si ottiene

$$\int_{-1}^{2} \frac{\varphi'\big(\sqrt{3-x}\big)}{\sqrt{3-x}}\,dx = \int_{2}^{1} \varphi'(y)\,(-2)\,dy = -2.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_{1-x}^{x} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt.$$

(i) Si determini il dominio D di f.

$[0, 1]$.

(ii) Si verifichi che il grafico di f è simmetrico rispetto al punto $(\frac{1}{2}, 0)$ (questo significa che $f(\frac{1}{2} + x) = -f(\frac{1}{2} - x)$).

$$f(\frac{1}{2} + x) = \int_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}+x} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = -\int_{\frac{1}{2}+x}^{\frac{1}{2}-x} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = -f(\frac{1}{2} - x)$$

(iii) Si calcolino le derivate prima e seconda f' e f''.

$$f'(x) = \sqrt{x}\, e^{-x} + \sqrt{1-x}\, e^{x-1}; \qquad f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x} - \sqrt{x}\, e^{-x} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\, e^{x-1} + \sqrt{1-x}\, e^{x-1}$$

(iv) Si provi che l'immagine $f(D)$ di f è un intervallo compatto del tipo $[-a, a]$ con $0 < a < 1$, e che la funzione $f : D \to [-a, a]$ è invertibile. Si calcoli inoltre $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

La derivata di f è sempre positiva, quindi la funzione è crescente; poniamo

$$a = \int_{0}^{1} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt \leq \int_{0}^{1} e^{-t}\, dt < 1.$$

Si ha $\min f = f(0) = -a$ e $\max f = f(1) = a$. La funzione è continua, quindi $f([0, 1]) = [-a, a]$

Applicando infine la formula per la derivata della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(1)} = e.$$