

Esame di Analisi matematica I : esercizi
Dr. Franco Obersnel
A.a. 2006-2007, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

Si risolvano gli esercizi : 1 2 3 4 5 6

ESERCIZIO N. 1. Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di E , $g_1, g_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo, per $x \in E$,

$$f(x) := \min\{g_1(x), g_2(x)\},$$

e supponiamo esistenti i limiti finiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \alpha_1; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x) = \alpha_2.$$

(i) Si supponga $\alpha_1 < \alpha_2$.

• Si provi che in questo caso esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) = g_1(x)$ per ogni $x \in U \cap E$.

• Si provi che in questo caso $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha_1$.

(ii) Si deduca da (i) che in ogni caso esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della f e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\sin \frac{1}{x}\right).$$

(i) Si determini l'insieme E dei punti di annullamento di f .

(ii) Si determinino

• $\inf E =$

• $\sup E =$

• l'insieme dei punti di accumulazione di E :

• l'insieme dei punti isolati di E :

(iii) Si stabilisca se esistono $\min E$ e $\max E$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli, facendo uso dei limiti notevoli,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \sin^2(1/x))^{x^2}.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - \arcsen x.$$

(i) Si determinino

• il dominio di f :

• $f'(x) =$

• $f'(0) =$

$f'(1) =$

• i segni di f' :

• la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f :

(ii) Si provi che f si annulla esattamente in due punti del suo dominio.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 5. Si determini, sull'intervallo $]1, +\infty[$, quella primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2-1)}$$

che ha limite π per $x \rightarrow +\infty$.

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_t^{2t} (s \exp(s^4)) ds \right) dt,$$

dove $\exp(z) = e^z$.

Si determinino

- $f'(x) =$

- $f''(x) =$

- $f'''(x) =$

- il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 di f di punto iniziale $x_0 = 0$:

- $\text{ord}_0 f =$