Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, appello straordinario

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log\left(1+t^\alpha\right) dt}{1-\cos(x^2)}$$

RISULTATO

Il limite è $-\infty$ se $\alpha < 3$. Il limite è $-\frac{1}{2}$ se $\alpha = 3$. Il limite è 0 se $\alpha > 3$.

SVOLGIMENTO

Per ogni $\alpha > 0$ sia il numeratore che il denominatore della funzione in oggetto tendono a zero per $x \to 0$, quindi si può applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log\left(1+t^\alpha\right) dt}{1-\cos(x^2)} \stackrel{L'H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+x^{2\alpha}\right)\cdot 2x - \log\left(1+x^\alpha\right)}{2x\cdot \operatorname{sen}(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha\left(\frac{\log\left(1+x^{2\alpha}\right)}{x^{2\alpha}}\cdot 2x^{\alpha+1} - \frac{\log\left(1+x^\alpha\right)}{x^\alpha}\right)}{2x^3\,\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}.$$

Dall'espressione scritta si deduce che il limite esiste finito se e solo se $\alpha = 3$, e in questo caso vale $-\frac{1}{2}$. Se invece $\alpha > 3$ il limite è zero, perché il numeratore è infinitesimo di ordine superiore del denominatore. Viceversa se $0 < \alpha < 3$ il limite è $-\infty$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1 + (x+1)^2}{1 + x^2}$$

(i) Si determinino eventuali asintoti di f e si stabilisca se la funzione f è limitata su $\mathbb{R}$.

Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y = 1$ a $\pm\infty$. La funzione quindi è limitata su $\mathbb{R}$. Infatti, per definizione di limite si ha $|f(x) - 1| < 1$ se $|x| > K$ per qualche $K > 0$, e sul compatto $[-K, K]$ la funzione è continua e quindi limitata.

(ii) Si calcoli la derivata di f.

Si ha $f'(x) = \frac{2(1-x^2-x)}{(1+x^2)^2}$.

(iii) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f.

La funzione è crescente in $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$. La funzione è decrescente in $]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$ e in $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. Il punto $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di minimo assoluto, il punto $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo assoluto.

(iv) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Se $\alpha < f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ o $\alpha > f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ l'equazione non ha soluzioni.

Se $\alpha = f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ oppure $\alpha = 1$ oppure $\alpha = f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ l'equazione ha una soluzione.

Se $f(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) < \alpha < 1$ o $1 < \alpha < f(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ l'equazione ha 2 soluzioni.

(v) Si determini la retta r tangente il grafico di f nel punto $(0, 2)$, e si trovino tutte le intersezioni di r con il grafico di f.

L'equazione della retta tangente nel punto $(0, 2)$ è $y = 2 + 2x$. Ponendo a sistema le equazioni $y = 2 + 2x$ e $y = f(x)$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ (doppia) e $x = -\frac{1}{2}$. Pertanto le intersezioni di r con il grafico di f sono il punto $(0, 2)$ e il punto $(-\frac{1}{2}, 1)$.

COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** ______________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1 + (x+1)^2}{1 + x^2}$$

(i) Si calcoli una primitiva della funzione f.

Si ha

$$f(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

da cui

$$F(x) = x + \log(1+x^2) + \text{arctg }(x).$$

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \Big(\int_0^x f(t)\, dt \Big)\, dx.$$

Calcoliamo

$$\int_0^1 \Big(x + \log(1+x^2) + \text{arctg }(x) \Big)\, dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \log(1+x^2)\, dx + \int_0^1 \text{arctg }(x)\, dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^1 \log(1+x^2)\, dx = \big[x \log(1+x^2) \big]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \log(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_0^1 \text{arctg }(x)\, dx = \big[x\, \text{arctg }(x) \big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(2)$$

L'integrale cercato vale quindi $\frac{3\pi}{4} + \frac{\log(2)-3}{2}$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^{\log x} e^{-t^2}\, dt.$$

(i) Si determinino il dominio $dom f$, gli zeri e i segni di f:

$dom f =]0, +\infty[$, si ha $\log x < 0$ se $x < 1$ e $\log x > 0$ se $x > 1$, $\log 1 = 0$, $e^{-t^2} > 0$ per ogni t. Pertanto $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$, $f(x) > 0$ se $x > 1$, $f(1) = 0$.

(ii) Si provi che per ogni $x \in dom f$ si ha $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$:

Con il cambio di variabile $s = -t$ si ottiene

$$f(\tfrac{1}{x}) = \int_0^{-\log x} e^{-t^2}\, dt = -\int_0^{\log x} e^{-s^2}\, ds = -f(x).$$

(iii) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = e^{-\log^2(x)} \cdot \frac{1}{x}; \qquad f''(x) = -e^{-\log^2(x)} \cdot \frac{1}{x^2}\big(1 + 2\log x\big).$$

(iv) Si determinino gli intervalli di concavità, convessità e i punti di flesso di f:

Si ha $f''(x) = 0$ se $x = e^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) > 0$ se $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) < 0$ se $x > e^{-\frac{1}{2}}$. Pertanto f è convessa su $]0, x < e^{-\frac{1}{2}}]$, concava su $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ e $x = e^{-\frac{1}{2}}$ è un punto di flesso discendente.

(v) Si provi che la funzione f è limitata sul suo dominio:

Osserviamo che $f'(x) > 0$ su $dom f$, quindi la funzione f è crescente, $\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si ha $e^{-t^2} \le 1$ se $t \in [0, 1]$ e $e^{-t^2} \le e^{-t}$ se $t \ge 1$. Pertanto

$$\int_0^1 e^{-t^2}\, dt \le 1 \qquad \text{e} \qquad \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \le \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$$

Di conseguenza

$$\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \le 2.$$

Inoltre, per la simmetria provata in (ii),

$$\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\tfrac{1}{x}) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) \ge -2.$$