Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ______________________	N. Matricola ________
Anno di Corso ______	Laurea in Ingegneria ______________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{tg}(2x)\cos(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{sen}\,(x)}{\mathrm{tg}(2x)+\frac{1}{2}x} =$$

$$\frac{x\left(\mathrm{tg}(2x)\cos(1/x) - \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right)}{x\left(\frac{\mathrm{tg}(2x)}{2x}\cdot 2 + 1/2\right)} \to \frac{-1/2}{2+1/2} = -\frac{1}{5}$$

(i) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{x\,\mathrm{tg}(2x)\cos(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{sen}\,(x)}{\mathrm{tg}(2x)+\frac{1}{2}x} =$$

$$\frac{\mathrm{tg}(2x)\left(x\cos(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\mathrm{sen}(x)\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}(2x)}\right)}{\mathrm{tg}(2x)\left(1+\frac{1/2\,x}{\mathrm{tg}(2x)}\right)} \to \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{4}{\pi}\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \text{arcsen}\,(\sqrt{2x - x^2})$.

(*i*) Si determini il dominio di f.

$0 \le x(2-x) \le 1 \longrightarrow \text{dom} f = [0, 2]$

(*ii*) Si stabilisca se f è derivabile nel suo dominio e si calcoli f'.

su $]0,1[\cup]1,2[$ $\quad f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-(2x-x^2)}\,\sqrt{2x-x^2}}$

$f'(0) = +\infty \quad f'(2) = -\infty$

$f'_-(1) = 1 \quad f'_+(1) = -1$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.

f non ha punti critici; $\quad f'(x) > 0$ su $[0,1[$

$f'(x) < 0$ su $]1, 2]$

(*iv*) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f.

f crescente su $[0,1]$ e decrescente su $[1,2]$

$\max f = f(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \min f = f(0) = f(2) = 0$

(*v*) Si determini $k \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione sia simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = k$. Si provi questo fatto.

$k = 1 \qquad f(2-x) = \text{arcsen}\left(\sqrt{2(2-x)-(2-x)^2}\right) =$

$= \text{arcsen}\left(\sqrt{4-2x-4+4x-x^2}\right) = f(x)$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2) & \text{se } x < 0; \\ \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(*i*) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(x^2) & \text{se } x < 0 \\ 2x \operatorname{sen}(x^4) & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} -4x^2 \operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(x^2) & \text{se } x < 0 \\ 8x^4 \cos(x^4) + 2 \operatorname{sen}(x^4) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(*ii*) Si stabilisca se $f \in C^n(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, 2$.

$f \in C^1(\mathbb{R})$; $f \notin C^2(\mathbb{R})$ infatti

$$f''_-(0) = 2 \neq 0 = f''_+(0)$$

(*iii*) Si determinino i punti critici di f.

$x < 0 \qquad \cos(x^2) = 0 \implies x = -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \qquad k \in \mathbb{N}$

$x > 0 \qquad \operatorname{sen}(x^4) = 0 \implies x = \sqrt[4]{k\pi} \qquad k \in \mathbb{N}^+$

punti critici : $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 0 \ \vee \ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \ x = -\sqrt{\frac{\pi}{2} + n\pi} \ \vee \ \exists\, n \in \mathbb{N}^+ \ x = \sqrt[4]{n\pi} \right\}$

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si calcoli la derivata della funzione $\varphi(x) \doteq \dfrac{x}{x^2+3x+2}$.

$$\varphi'(x) = \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2}$$

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_1^2 \frac{x^2-2}{(x^2+3x+2)^2}\log x\, dx =$$

$$= \int_1^2 -\varphi'(x)\cdot \log x \, dx = \Big[-\varphi(x)\log x\Big]_1^2 + \int_1^2 \varphi(x)\cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\log 2 + \int_1^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\log 2 + \log\frac{3}{4} - \log\frac{2}{3}$$