Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(2x) \cdot \log\big(\cos(e^{-x})\big)}{\operatorname{arctg} x}$.

Si calcolino i limiti $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

RISULTATO

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2\log\big(\cos(1)\big)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2\pi}$

SVOLGIMENTO

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh}(2x)}{2x} 2 \frac{x}{\operatorname{arctg} x} \cdot \log\big(\cos(e^{-x})\big) = 2\log\big(\cos(1)\big)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh}(2x)}{e^{2x}} \cdot \frac{\log\Big(1 + \big(\cos(e^{-x}) - 1\big)\Big)}{\big(\cos(e^{-x}) - 1\big)} \cdot \frac{\big(\cos(e^{-x}) - 1\big)}{e^{-2x}} = -\frac{1}{2\pi}$$

ESERCIZIO N. 2. Al variare di $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $F_n :]0, +\infty[$ definita da

$$F_n(x) = \int_0^x \big(\log t\big)^n \, dt.$$

(i) Si verifichi che la funzione F_n è ben definita (cioè la funzione $(\log t)^n$ è integrabile in senso generalizzato su $]0, x]$ per ogni $x > 0$).

Per ogni $n \geq 1$ la funzione $(\log t)^n$ è infinita di ordine sottoreale in 0, pertanto è integrabile in senso generalizzato per il criterio dell'ordine di infinito.

(ii) Si provi (integrando per parti) che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $x > 0$ vale la formula induttiva

$$F_{n+1}(x) = x\big(\log x\big)^{n+1} - (n+1)F_n(x)$$

Si ha, integrando per parti,

$$F_{n+1}(x) = \lim_{a \to 0^+} \int_a^x 1 \cdot \big(\log t\big)^{n+1} dt = \lim_{a \to 0^+} \left(\Big[t\big(\log t\big)^{n+1}\Big]_a^x - \int_a^x t(n+1)\big(\log t\big)^n \frac{1}{t}\, dt\right) =$$

$$= x\big(\log x\big)^{n+1} - (n+1)F_n(x).$$

(iii) Si calcoli, usando la formula verificata in (ii),

$$\int_1^e \big(\log t\big)^4 dt =$$

Si ha, per ogni n, $F_{n+1}(e) = e\big(\log e\big)^{n+1} - (n+1)F_n(e) = e - (n+1)F_n(e)$, quindi $F_1(e) = 0$, $F_2(e) = e$, $F_3(e) = -2e$, $F_4(e) = 9e$.
Si ha, per ogni n, $F_{n+1}(1) = -(n+1)F_n(1)$, quindi $F_1(1) = -1$, $F_2(1) = 2$, $F_3(1) = -6$, $F_4(1) = 24$.
Dunque $\displaystyle\int_1^e \big(\log t\big)^4 dt = F_4(e) - F_4(1) = 9e - 24$.

(iv) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si calcoli

$$\int_0^1 \big(\log t\big)^n dt =$$

Proviamo per induzione che $F_n(1) = (-1)^n n!$. Infatti
$F_1(1) = -1$ e $F_{n+1}(1) = -(n+1)F_n(1) = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1}(n+1)!$. Dunque

$$\int_0^1 \big(\log t\big)^n dt = F_n(1) = (-1)^n n!.$$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+1)\log|x+1| - x$$

(i) Si determinino il dominio di f e si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \qquad \lim_{x\to-1} f(x) =$$

$dom f = \mathrm{I\!R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = 1$$

(ii) Si calcoli la derivata di f e si studino i segni della funzione f'.

f è derivabile sul dominio e si ha $f'(x) = \log|x+1|$. Si noti che $\lim_{x\to-1} f'(x) = -\infty$.
Si ha $f'(x) < 0$ se $x \in]-2,-1[\,\cup\,]-1,0[$, $f'(x) > 0$ se $x < -2$ o $x > 0$. $f'(-2) = f'(0) = 0$.

(iii) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi di f.

La funzione è crescente in $]-\infty, 2]$ e in $[0, +\infty[$. La funzione è decrescente in $]-2,-1[\,\cup\,]-1,0]$. Si ha chiaramente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.

(iv) Si scriva l'equazione di eventuali rette tangenti il grafico della funzione f parallele alla retta di equazione $y = x$.

Si deve imporre $f'(x) = 1$, pertanto vi sono due punti: $x = e - 1$ e $x = -e - 1$. Le equazioni sono

$$y = x + 2 - e \qquad \text{e} \qquad y = x + 2 + e$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt$$

(i) Si calcoli $f(1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt$:

Con il cambio di variabile $z = 1 + t^2$ si vede subito che una primitiva della funzione $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ è la funzione $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$. Si ha quindi $f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ e, in particolare, $f(1) = -\frac{1}{4}$.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se f è limitata su $\mathbb{R}$. In caso affermativo si calcolino $\inf f$ e $\sup f$, precisando se sono anche minimo e/o massimo.

Si osserva che la funzione integranda è di ordine 3 a $\pm\infty$, quindi è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$. Inoltre è una funzione dispari e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt = 0$. Si ha evidentemente $\min f = f(0) = -\frac{1}{2}$ e $\sup f = 0$. Si osservi che f è sempre negativa.

(iii) Si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx =$$

Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$