

I PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA I

A.a. 2007–2008. Pordenone, 26 ottobre 2007

COGNOME e NOME _____ Matr. N. _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si consideri l’insieme

$$E = \{-(2^m) : m \in \mathbb{Z}\} \cup]1, 2]$$

(i) Si determinino

• $\inf E =$

• $\sup E =$

• l’insieme dei punti di accumulazione di E :

• l’insieme dei punti isolati di E :

• l’insieme dei punti interni di E :

(ii) Si dica se esistono $\min E$ e $\max E$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la successione $\langle x_n \rangle_n$ definita per ricorrenza da

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 2; \quad x_{n+2} = \frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

- i) Si verifichi che per ogni $n > 0$ si ha $x_{2n} < 1 < x_{2n+1}$.
- ii) Si verifichi che per ogni $n \geq 1$ si ha $x_{2n} < \frac{1}{4}$.
- iii) Si verifichi che per ogni $n \geq 2$ si ha $x_{2n+1} \geq 2^{2n+1}$.
- iv) Si stabilisca se le successioni $\langle x_{2n} \rangle_n$, $\langle x_{2n+1} \rangle_n$, $\langle x_n \rangle_n$ sono limitate.
- v) Si stabilisca (motivando la risposta) se le successioni $\langle x_{2n} \rangle_n$, $\langle x_{2n+1} \rangle_n$, $\langle x_n \rangle_n$ sono monotone.
- vi) Si stabilisca (motivando la risposta) se esistono $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ e in caso affermativo si calcolino tali limiti.

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \pi - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(\sqrt{x+2}) \right).$$

(i) Si determini, giustificando la risposta, il dominio di f .

(ii) Si studi la monotonia di f , stabilendo se f è crescente o decrescente.

(iii) Si determinino l’estremo inferiore e l’estremo superiore dell’insieme immagine di f , specificando se sono il minimo e il massimo rispettivamente.

(iv) Si calcolino esplicitamente i valori delle controimmagini $f^{-1}(\{\pi\})$, $f^{-1}(\{0\})$ e $f^{-1}(\{2\pi\})$.