Esame di Analisi matematica I
Prova di esercizi
Corso del Professor Franco Obersnel
Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}.$$

(*i*) Si determini il dominio di f.

$]-\infty, -2-\sqrt{5}] \cup [-2+\sqrt{5}, +\infty[$

(*ii*) Si calcolino

• $Ord_{-\infty} f =$ 1 • $Ord_{+\infty} f =$ 1

$\lim_{x \to -\infty} f(x)/x = -1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

(*iii*) Si determinino eventuali asintoti obliqui di f a $-\infty$ e/o a $+\infty$.

asintoto a $-\infty$ $\quad y = -x-2$

asintoto a $+\infty$ $\quad y = x+2$

(*iv*) Si determinino eventuali punti del grafico di f nei quali la retta tangente ha equazione $3x - 2y + 1 = 0$.

$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-1}} \qquad f'(x) = \frac{3}{2} \iff x \geq -2 \wedge 2x+4 = 3\sqrt{x^2+4x-1}$

$\boxed{x = 1}$

$y = f(1) + f'(1)(x-1) \leadsto y = 2 + \frac{3}{2}(x-1) \sim y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ //

punto $(1, 2)$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione polinomiale $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$.

(i) Si calcolino $p'(x)$ e $p''(x)$:

$p'(x) = 4x^3 - 4x - 1$ $\quad p''(x) = 12x^2 - 4$

(ii) Si determinino gli intervalli di concavità e convessità e i punti di flesso di p.

p convesso su $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ e su $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$

p concavo su $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ punto di flesso discendente; $\frac{1}{\sqrt{3}}$ punto di flesso ascendente

(iii) Si determinino i parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{se } |x| \leq 1; \\ ax + b & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow \boxed{a = b = -1}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -2 \Rightarrow a + b = -2$

(iv) Si determini il massimo $n \in \mathbb{N}$ tale che $f \in C^n(\mathbb{R})$.

$n = 1$ infatti $f'(-1) = f'(1) = 1$, $\quad f''_-(1) = 0 \neq f''_+(1) = 8$

(v) Si calcoli $f'(x)$ in -1, 0, 1 e nei punti di flesso e si indichi il segno di f' in tali punti.

$p'(-1) = p'(0) = p'(1) = -1$ $\quad p'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} > 0$ $\quad p'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-8 - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$

(vi) Si provi che $f'(x) \leq -1$ su $[0, +\infty[$.

$4x^3 - 4x \leq 0$ su $[0, 1]$

$4x(x^2 - 1)$ $\quad x \geq 0$, $\quad x^2 \leq 1$ //

(Continua nella pagina seguente)

COGNOME e NOME ________________ **N. Matricola** ________

(vii) Si provi che f è decrescente su $[0, +\infty[$.

essendo $f'(x) < 0$ f è decrescente.

($viii$) Si verifichi che f ha un solo punto di minimo relativo e un solo punto di massimo relativo e che questi punti sono entrambi negativi.

$f'(-1) < 0 < f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ per il Teorema di Bolzano esiste $\xi \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ con $f'(\xi) = 0$; essendo f' crescente su $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ si ha $f'(x) < 0$ se $x \in [-1, \xi[$ e $f'(x) > 0$ se $x \in \left]\xi, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, quindi ξ è punto di minimo; in modo simile si verifica che esiste $\eta \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right[$ con $f'(\eta) = 0$; questo è punto di massimo.

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \begin{cases} t \log(|t| & \text{se } t < 0; \\ \frac{t-t^2}{1+t} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si calcoli $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\, dt$.

$$\int_{-1}^{0} f(t)\, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \log(-t)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{4}$$

(continua nella pagina seguente)

(*ii*) Si calcoli $\int_0^1 f(t)\,dt$.

$$\frac{t-t^2}{1+t} = 2-t-\frac{2}{1+t} \qquad \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{3}{2} - 2\log 2$$

(*iii*) Si calcoli $\int_{-1}^x f(t)\,dt$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

se $x < 0$ $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}x^2\log(-x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

se $x > 0$ $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\,dt = \frac{1}{4} + \int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{4} + 2x - \frac{1}{2}x^2 - 2\log(1+x)$

(*iv*) Si calcoli $\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$.

$$\int_{-1}^0 \log|t|\,dt + \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\,dt = -1 - 1 + 2\log 2 = 2\log 2 - 2$$