Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

Verifica delle competenze preliminari.

(i) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi^2$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in dom f$, se $x < M$, allora $|f(x) + \pi^2| < \varepsilon$.

(ii) Si calcoli il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{-n} - 3^{-n}}{4^{-n}}$

$$\frac{2^{-n} - 3^{-n}}{4^{-n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-n} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-n} - 1\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - 1\right) = +\infty$$

(iii) Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \int_{x^2}^{\pi} \cos(\sqrt{t})\, dt + \log(x^2 + 1)$.

$$-2x\, \cos(|x|) + \frac{2x}{1 + x^2}$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\int_0^2 x^2 \sqrt{8 - x^3}\, dx$

$$= \frac{32}{9}\sqrt{2}$$

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = \log x - a\sqrt{x}$$

(*i*) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to 0} f_a(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0} f_a(x) = -\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ se $a \le 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$ se $a > 0$.

(*ii*) Si calcoli $f'_a(x)$; si determinino gli zeri e il segno di $f'_a(x)$ e si studi la monotonia e l'eventuale esistenza di punti di massimo/minimo al variare di $a \in \mathbb{R}$. Quando esiste, si calcoli il valore massimo della funzione.

$$f'_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x}\Big(\frac{2 - a\sqrt{x}}{2}\Big).$$

Se $a \le 0$ la derivata è sempre positiva, quindi f_a è strettamente crescente su $]0, +\infty[$. Se $a > 0$ si ha $f'(x) = 0$ per $x = \left(\frac{2}{a}\right)^2$; $f'(x) > 0$ su $]0, \left(\frac{2}{a}\right)^2[$ e $f'(x) < 0$ su $]\left(\frac{2}{a}\right)^2, +\infty[$. Pertanto la funzione f_a è strettamente crescente su $]0, \left(\frac{2}{a}\right)^2]$ e strettamente decrescente su $[\left(\frac{2}{a}\right)^2, +\infty[$. Se $a > 0$ esiste il massimo assoluto della funzione, ed è

$$\max f_a = f_a\left(\left(\frac{2}{a}\right)^2\right) = 2\log\frac{2}{a} - 2.$$

(*iii*) Si disegni il grafico di f_a quando $a = -1$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = 1$.

Il grafico della funzione per $a = -1$ è simile al grafico del logaritmo, funzione sempre crescente e concava, si annulla in un punto vicino a $\frac{1}{2}$ e assume il valore 1 quando $x = 1$.
Il grafico della funzione per $a = \frac{1}{2}$ è simile al grafico del logaritmo solo vicino a 0, la funzione diventa positiva e raggiunge il suo massimo nel punto $x = 16$, dove assume il valore $\log 16 - 2 > 0$. Poi decresce, diventa negativa e tende a $-\infty$.
Il grafico della funzione per $a = 1$ è simile al grafico del caso precedente; tuttavia la funzione resta sempre negativa, raggiunge il suo massimo nel punto $x = 4$, dove assume il valore $\log 4 - 2 < 0$. Poi decresce e tende a $-\infty$.

(*iv*) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $\log x = a\sqrt{x}$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo calcolare il numero degli zeri della funzione f_a. Ci sarà uno ed uno solo zero se $a \le 0$. Ci saranno due zeri per valori piccoli di $a > 0$ e nessuno per valori grandi. Dobbiamo valutare f_a nel punto di massimo e studiarne il segno. Poiché $\max f_a = 2\log\frac{2}{a} - 2$, si ha $\max f_a < 0$ se $a > \frac{2}{e}$, $\max f_a > 0$ se $0 < a < \frac{2}{e}$, $\max f_a = 0$ se $a = \frac{2}{e}$.
Si conclude che le soluzioni sono 1 se $a \le 0$ o $a = \frac{2}{e}$, 2 se $a \in]0, \frac{2}{e}[$, nessuna se $a > \frac{2}{e}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione razionale

$$f(x) = \frac{2x^2 - 15x + 30}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32}$$

(i) Si verifichi che il denominatore della funzione f si annulla nel punto $x = 2$ e si fattorizzi completamente tale denominatore.

$$x^3 - 10x^2 + 32x - 32 = (x-2)\,(x-4)^2$$

(ii) Si decomponga la funzione f in frazioni semplici con il metodo di Hermite.

$$f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-4)^2}$$

(iii) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-4)^2}\right) dx = \frac{1}{12} - 2\,\log(2)$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$.

La funzione è definitivamente positiva e infinitesima di ordine 1 a $+\infty$, quindi l'integrale vale $+\infty$.

ESERCIZIO N. 4. Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione reale h definita da

$$h(t) = \begin{cases} (2t+1)^2 + a & \text{se } x < 0; \\ \sqrt{t - t^2} & \text{se } 0 \le t \le 1; \\ t + b & \text{se } t > 1; \end{cases}$$

e si definisca $f(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\, dt$.

(*i*) Si determinino i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione h sia continua su $\mathbb{R}$.

Studiando i limiti da destra e sinistra si ottiene $a = b = -1$.

(*ii*) Si calcoli, dove possibile, $f'(x)$ e $f''(x)$.

$f'(x) = h(x)$;

$$f''(x) = h'(x) = \begin{cases} 4(2x+1) & \text{se } x < 0; \\ \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & \text{se } 0 < x < 1; \\ 1 & \text{se } x > 1; \end{cases}$$

Si ha inoiltre $f''_s(0) = 4 < +\infty = f''_d(0)$, $f''_s(1) = -\infty < 1 = f''_d(1)$.

(*iii*) Si determinino gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di f.

La funzione è concava su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, convessa su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, concava su $[\frac{1}{2}, 1]$, convessa su $[1, +\infty[$. Il punto $-\frac{1}{2}$ è un punto di flesso ascendente. Il punto $\frac{1}{2}$ è un punto di flesso discendente. Il punto 1 è un punto di flesso ascendente.

(*iv*) Quanti sono gli zeri della funzione f?

Si ha $f(0) = 0$. La funzione $h(x)$ è sempre positiva se $x > 0$, quindi non ci sono zeri nell'intervallo $]0, +\infty[$. La funzione f è decrescente su $[-1, 0]$, quindi $f(x) > 0$ su questo intervallo. D'altra parte la funzione f è crescente su $]-\infty, -1]$ e ha limite $-\infty$ per $x \to -\infty$. In conclusione, la funzione ha esattamente due zeri.