Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = x - 2 + |2x - 3| - |3x - 1|$.

(i) Si calcolino, se esistono, i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big) = \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big) =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big)}{x} = \qquad \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{3\varphi(x) - 2}{3x - 1} =$$

Si ha $\varphi(x) = 2x$ se $x \leq \frac{1}{3}$, $\varphi(x) = 2 - 4x$ se $x \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]$, $\varphi(x) = -4$ se $x \geq \frac{3}{2}$. I limiti si calcolano facilmente, nell'ordine: non esiste, $-\operatorname{sen}(4)$, 2, non esiste (il limite richiesto è la derivata della funzione nel punto $\frac{1}{3}$, ma questa non è definita in quanto la derivata sinistra è 2 mentre la derivata destra è -4).

(ii) Si calcoli l'ordine di infinitesimo in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \varphi\big(\cos(x)\big) + 2\cos\big(\varphi(x)\big)$

In un intorno del punto $x_0 = 0$ si ha $\cos(x) \simeq 1$, $\varphi(\cos(x)) = 2 - 4\cos(x)$ e $\varphi(x) = 2x$, quindi si ha

$$f(x) = 2 - 4\cos(x) + 2\cos(2x); \qquad f'(x) = 4\operatorname{sen}(x) - 4\operatorname{sen}(2x); \qquad f''(x) = 4\cos(x) - 8\cos(2x).$$

Si ha $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -4$. Per il lemma di Peano si conclude che $ord_0 f = 2$.

(iii) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste un punto $\xi \in]-1, 1[$ tale che $\varphi(1) - \varphi(-1) = 2\,\varphi'(\xi)$.

Si ha $\varphi(1) - \varphi(-1) = 0$, ma $\varphi'(x) = 2$ se $x < \frac{1}{3}$ e $\varphi'(x) = -4$ se $x \in]\frac{1}{3}, \frac{3}{2}[$, quindi non esiste alcun $\xi \in]-1, 1[$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12-x^2}{16} & \text{se } x \in [-4, 2]; \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione f è integrabile (in senso generalizzato) e se è primitivabile su $\mathbb{R}$.

La funzione non è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ perché per $x \to \pm\infty$ si comporta come $\frac{1}{x}$ (è infinitesima di ordine 1).

La funzione è primitivabile su $\mathbb{R}$ perché è continua. Infatti si ha

$$\lim_{x\to -4_-} f(x) = \lim_{x\to -4_+} f(x) = -\frac{1}{4} \qquad \text{e} \lim_{x\to 2_-} f(x) = \lim_{x\to 2_+} f(x) = \frac{1}{2}$$

(ii) Si determini la primitiva F di f che verifica $F(0) = 0$.

La funzione si integra facilmente sui tre intervalli; poiché la primitiva è in particolare continua, dobbiamo trovare due costanti $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che sia continua la funzione

$$F(x) = \begin{cases} \log(-x) + a & \text{se } x < -4; \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{48}x^3 & \text{se } x \in [-4, 2]; \\ \log(x) + b & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Si ottiene quindi $a = -\frac{5}{3} - \log(4)$ e $b = \frac{4}{3} - \log(2)$.

(iii) Si determini il massimo numero naturale n per cui è definito il polinomio di Taylor di ordine n di F nel punto $x_0 = 2$. Si calcoli tale polinomio.

Osserviamo che la funzione f è derivabile in 2, essendo $f'_-(2) = f'_+(2) = -\frac{1}{4}$, mentre f non è due volte derivabile in 2, essendo $-\frac{1}{8} = f''_-(2) \neq f''_+(2) = \frac{1}{4}$. Quindi la funzione F è derivabile due volte, ma non tre volte, in $x_0 = 2$. Pertanto si ha $n = 2$. Si ha $F(2) = \frac{4}{3}$; $F'(2) = f(2) = \frac{1}{2}$, $F''(2) = f'(2) = -\frac{1}{4}$, da cui

$$P_2(x) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t-t^2}}\, dt$$

(*i*) Si determini il dominio D di f.

La funzione integranda è definita se $t \in [0,1]$, quindi $D = [0,1]$.

(*ii*) Si studino gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione f su D, specificando l'esistenza di eventuali punti di minimo, massimo, flesso.

Si ha $f'(x) = e^{\sqrt{x-x^2}}$, $f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x-x^2}}}{2\sqrt{t-t^2}}(1-2t)$. Pertanto la funzione f è strettamente crescente su $[0,1]$, il minimo è $f(0) = 0$, il massimo è $f(1)$. La funzione f è convessa su $[0, \frac{1}{2}]$ e concava su $[\frac{1}{2}, 1]$. Il punto $x = \frac{1}{2}$ è un punto di flesso discendente.

(*iii*) Indichiamo con $f(D)$ l'insieme immagine della f. Si verifichi che $[0,1] \subset f(D) \subset [0, \sqrt{e}]$

La funzione f è continua e definita su un intervallo, inoltre $\min f = 0$ e $\max f = f(1)$, quindi $D = [0, \max f]$.

Per verificare l'asserto è quindi sufficiente dimostrare che $1 < f(1) < \sqrt{e}$. Per ogni $t \in [0,1]$ si ha $0 \leq \sqrt{t-t^2} \leq \frac{1}{2}$, pertanto

$$1 = \int_0^1 1\, dt \leq f(1) \leq \int_0^1 e^{\frac{1}{2}}\, dt = \sqrt{e}$$

e le disuguaglianze sono strette perché le disuguaglianze $0 < \sqrt{t-t^2} < \frac{1}{2}$ sono strette su insiemi di misura non nulla.

(*iv*) Si verifichi che $x = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione

$$\int_0^x e^{\sqrt{t-t^2}}\, dt = \int_0^x e^{t-t^2}\, dt$$

Si osservi che, se $s \in]0,1[$, si ha $\sqrt{s} > s$. Per ogni $t \in]0,1[$ si ha $s = t - t^2 \in]0, \frac{1}{4}]$, quindi

$$e^{\sqrt{t-t^2}} > e^{t-t^2}.$$

Pertanto si ha $e^{\sqrt{t-t^2}} - \int_0^x e^{t-t^2} > 0$ su $]0,1[$. Si conclude che per ogni $x \in]0,1]$ si ha

$$\int_0^x \left(e^{\sqrt{t-t^2}} - \int_0^x e^{t-t^2} \right) dt > 0.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}}}{x\sqrt{|x|}}$$

(i) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione f è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$.

La funzione è dispari, quindi è sufficiente considerarla su $]0,+\infty[$. In 0 la funzione è limitata (è infinitesima di ordine soprareale). A $+\infty$ la funzione decresce con ordine $\frac{3}{2}$. Quindi è integrabile in senso generalizzato per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

(ii) Si calcoli

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Con il cambio di variabile $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ si ottiene

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^1 \big(-2e^{-y}\big)\,dy = \frac{2}{e}.$$

(iii) Si calcoli

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

Con il cambio di variabile $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ si ottiene

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to +\infty}\int_1^b f(x)\,dx = \lim_{b\to +\infty}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \big(-2e^{-y}\big)\,dy = 2 - \frac{2}{e}.$$

(iv) Si calcoli

$$\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Poiché la funzione è dispari si ha

$$\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 2 - \frac{2}{e}.$$