Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ____________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ____________________	

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x^3 e^{-|x|}$.

(i) Si stabilisca l'esistenza di eventuali simmetrie della funzione f e si calcolino i limiti

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

f è una funzione dispari.

(ii) Si determinino gli zeri e i segni di f.

$f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$; $f(0) = 0$

(iii) Si calcolino f' e f''.

$f'(x) = (3x^2 - |x|^3)e^{-|x|}$; $f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)e^x$ se $x < 0$ e $f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}$ se $x > 0$. $f''(0) = 0$.

(iv) Si determini il massimo $n \in \mathbb{N}$ tale che $f \in C^n(\mathbb{R})$.

$f'''(0) = 6$, $f_-^{iv}(0) = 24$, $f_+^{iv}(0) = -24$. Perciò $n = 3$.

(v) Si scriva il polinomio di Taylor centrato nel punto $x_0 = 1$ di ordine 3 della funzione f.

$$e^{-1}\Big(1 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3\Big)$$

(*vi*) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.
punti critici $-3, 0, 3$. $f'(x) > 0$ se $x \in]-3, 0[\cup]0, 3[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

(*vii*) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f.
$\max f = f(3) = \left(\frac{3}{e}\right)^3$, $\min f = f(-3) = -\left(\frac{3}{e}\right)^3$. f crescente su $[-3, 3]$; f decrescente su $]-\infty, -3]$ e su $[3, +\infty[$.

(*viii*) Si determinino gli zeri e i segni di f''.
zeri: $-3 \pm \sqrt{3}, 0, 3 \pm \sqrt{3}$. $f''(x) > 0$ su $]-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}[\cup]0, 3-\sqrt{3}[\cup]3+\sqrt{3}, +\infty[$; $f''(x) < 0$ su $]-\infty, -3-\sqrt{3}[\cup]-3+\sqrt{3}, 0[\cup]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[$.

(*ix*) Si determinino gli intervalli di convessità e i punti di flesso di f.
f convessa su $[-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}]$, $[0, 3-\sqrt{3}]$ e $[3+\sqrt{3}, +\infty[$. f concava su $]-\infty, -3-\sqrt{3}]$, $[-3+\sqrt{3}, 0]$ e $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$. Punti di flesso ascendente: $-3-\sqrt{3}, 0, 3+\sqrt{3}$; punti di flesso discendente: $-3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$.

(*x*) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
0 soluzioni se $|\alpha| > \left(\frac{3}{e}\right)^3$; 1 soluzione se $|\alpha| = \left(\frac{3}{e}\right)^3$ oppure $\alpha = 0$; 2 soluzioni se $0 < |\alpha| < \left(\frac{3}{e}\right)^3$.

(*xi*) Si determini il minimo numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che la funzione composta $g(x) = \sqrt{n - f(x)}$ sia definita su tutto $\mathbb{R}$.
Si osservi che $2 \cdot e^3 > 2 \cdot (2 + \frac{1}{2})^3 = 2 \cdot (8 + 6 + \frac{3}{2} + \frac{1}{8}) > 30 > 3^3$. Quindi

$$1 < \left(\frac{3}{e}\right)^3 < 2$$

Poiché $\max f = f(3) = \left(\frac{3}{e}\right)^3$ si ha che la funzione g è definita su $\mathbb{R}$ se $n = 2$ ma non è definita su $\mathbb{R}$ se $n = 1$. Pertanto $n = 2$.

(*xii*) Si calcoli l'area (generalizzata) della regione piana $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, +\infty[, 0 < y < f(x)\}$.

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-e^{-x}x^3\right]_0^b + \left[-e^{-x}3x^2\right]_0^b + \left[-e^{-x}6x\right]_0^b + \left[-e^{-x}6\right]_0^b \right) = 6$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 2. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - \log_\alpha(1+x) - 1}{x^2}$$

(i) Si verifichi che esiste uno ed un solo $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ tale che $\alpha_0 \cdot \log(\alpha_0) = 1$.

(Si ricorda che $\log z$ indica il logaritmo naturale di z: $\log z = \log_e z$.)

Posto $h(z) = z \cdot \log z$ si osserva che $h(1) = 0$ mentre $h(2) = 2 \cdot \log 2 > 1$ (infatti $4 > e \to 2 > \sqrt{e} \to \log 2 > \frac{1}{2}$). Per il teorema di connessione si conclude che esiste un α_0 tale che $h(\alpha_0) = 1$. L'unicità deriva dal fatto che la funzione h è crescente se $z > 1$ ed è negativa se $z < 1$.

(ii) Per $\alpha \neq \alpha_0$ si stabilisca se esiste il limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Il limite non esiste. Infatti, da noti limiti notevoli, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \frac{\log_\alpha(1+x)}{x}\right) = \alpha - \frac{1}{\log\alpha}.$$

Quindi i limiti destro e sinistro saranno uno $-\infty$ e l'altro $+\infty$.

(iii) Per $\alpha = \alpha_0$ si stabilisca se esiste il limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Se $\alpha = \frac{1}{\log\alpha}$, usando il teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\frac{\alpha_0^2}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha_0}{2(1+x)} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x).$$

(iv) Per $\alpha = \alpha_0$ si stabilisca se esiste il limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Poiché $\alpha_0 < 2$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha_0 - 2}\Big(\big(\frac{1}{x} + 1\big)^{\alpha_0} - \frac{\log_{\alpha_0}(1+x)}{x^{\alpha_0}} - \frac{1}{x^{\alpha_0}}\Big) = 0.$$

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da da

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{2} \frac{t^2}{t^3+2}\,dt + \int_{2}^{x} \frac{2t^4+t-1}{2t^4+t}\,dt$$

(*i*) Si calcoli $f(2)$:

$$f(2) = \Big[\frac{1}{3}\log|t^3+2|\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{3}\log(\frac{80}{17}).$$

(*ii*) Si calcoli $f'(x) =$

$$-\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}+2}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) + \frac{2x^4+x-1}{2x^4+x} = 1.$$

(*iii*) Si determini l'equazione della retta tangente il grafico di f nel punto $\big(2, f(2)\big)$.

$$y = \frac{1}{3}\log(\frac{80}{17}) + (x-2).$$

(*iv*) Si calcoli $f(100) =$

Poiché $f'(x) = 1$ per ogni x la funzione è lineare, in particolare coincide con il suo approssimante lineare in qualunque suo punto. Quindi

$$f(x) = x + \frac{1}{3}\log(\frac{80}{17}) - 2$$

e pertanto $f(100) = 98 + \frac{1}{3}\log(\frac{80}{17})$.