Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, II appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

(i) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x\,e^{x^2}}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x\,e^{x^2}} \Leftarrow^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+2x^2} = 0.$$

(ii) Si utilizzi il risultato precedente per calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x\,\int_0^x e^{t^2}\,dt}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x\,\int_0^x e^{t^2}\,dt} \Leftarrow^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\,e^{x^2}}{\int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x\,e^{x^2}}+1} = 2$$

(iii) Si utilizzi il risultato precedente per calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Scriviamo

$$\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)\right).$$

Calcolando il limite dell'argomento dell'esponenziale riconosciamo quanto calcolato in (ii):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\log\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right) \Leftarrow^{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2x\,\int_0^x e^{t^2}\,dt} = 1$$

Perciò il limite richiesto è

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^{\frac{1}{x^2}} = e.$$

ESERCIZIO N. 2.

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la famiglia di cubiche

$$f_\alpha(x) = x^3 - \alpha x^2 + x - 1$$

(i) Si calcolino le derivate prima e seconda di f_α.

$f'_\alpha(x) = 3x^2 - 2\alpha x + 1.$

$f''_\alpha(x) = 6x - 2\alpha.$

(ii) Si determini l'insieme dei parametri α per i quali la funzione f_α è monotona.

La funzione f_α è monotona se e solo se il discriminante della derivata è non positivo. Infatti, se $\Delta > 0$ abbiamo due punti critici, il primo è un punto di massimo relativo, il secondo un punto di minimo relativo. Dunque

$$\frac{\Delta}{4} = \alpha^2 - 3 \leq 0,$$

cioè se $|\alpha| \leq \sqrt{3}$.

(iii) Si determini l'insieme dei parametri α per i quali la funzione f_α è monotona sull'intervallo $[0, +\infty[$.

Chiaramente f_α è monotona sull'intervallo $[0, +\infty[$ se $|\alpha| \leq \sqrt{3}$ (perché lo è su tutto $\mathbb{R}$). Supponiamo quindi che $|\alpha| > \sqrt{3}$. I punti critici di f_α sono $x_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2-3}}{3}$ e $x_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2-3}}{3}$. La funzione f_α è crescente sugli intervalli $]-\infty, x_1]$ e $[x_2, +\infty[$, mentre è decrescente sull'intervallo $[x_1, x_2]$. Osserviamo che, se $\alpha < -\sqrt{3} < 0$, si ha $x_1 < x_2 < 0$, e quindi f_α è monotona sull'intervallo $[0, +\infty[$. Se invece $\alpha > \sqrt{3} > 0$ si ha $0 < x_1 < x_2$ e quindi f_α non è monotona sull'intervallo $[0, +\infty[$. In definitiva f_α è monotona sull'intervallo $[0, +\infty[$ se e solo se $\alpha \in]-\infty, \sqrt{3}]$.

(iv) Si determinino, al variare di α, gli eventuali punti di flesso di f.

$x = \frac{\alpha}{3}$ è punto di flesso ascendente.

(v) Si spieghi se è vero che se $\alpha < 0$ la funzione f_α ha uno ed un solo zero reale.

Non è vero. Osserviamo per cominciare che, per ogni α, si ha $f_\alpha(0) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. Quindi, per il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano, esiste uno zero $x_3 > 0$. Fissiamo ora ad esempio $x = -1$. Si ha $f_\alpha(-1) = -3 - \alpha$. Se prendiamo $\alpha < -3$ si ha quindi $f(-1) > 0$. Di nuovo per il teorema di esistenza degli zeri esistono pertanto, oltre allo zero $x_3 > 0$, altri due zeri: uno zero $x_1 < -1$, e un secondo zero $x_2 \in]-1, 0[$.

(vi) Sia r la retta tangente il grafico di f_α nel punto $\Big(0, f_\alpha(0)\Big)$. Si determini, al variare di α, il numero delle intersezioni di r con il grafico di f_α.

La retta r ha equazione $y = x - 1$. Mettendo a sistema l'equazione di r con l'equazione $y = f_\alpha(x)$ si ottiene

$$x^3 - \alpha x^2 = 0$$

cioè $x = 0$ (soluzione doppia, come deve essere) e $x = \alpha$. Le intersezioni sono dunque 2 per ogni $\alpha \neq 0$ e una sola se $\alpha = 0$.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t+t^2}\,dt$$

(i) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, e si stabilisca se la funzione f ammette eventuali asintoti.

$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$ perché la funzione è infinitesima a $\pm\infty$ di ordine 1. Il segno sarà positivo a $+\infty$ perchè la funzione integranda è positiva se $t \geq 0$. Il segno sarà positivo anche a $-\infty$, infatti l'argomento per valori negativi di t con $|t|$ grande è negativo, ma l'intervallo di integrazione ha gli estremi invertiti. Non ci sono asintoti obliqui. Infatti, si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

(ii) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}; \qquad f''(x) = \frac{-x^2-2x}{(1+x+x^2)^2}$$

(iii) Si determinino eventuali punti di massimo e di minimo di f e gli intervalli di monotonia.

$x = -1$ è l'unico punto critico della funzione, pertanto è punto di minimo assoluto. La funzione f è decrescente su $]-\infty, -1]$ e crescente su $[-1, +\infty[$.

(iv) Si determinino eventuali punti di flesso e gli intervalli di convessità e concavità di f.

$x = -2$ è punto di flesso ascendente, $x = 0$ è punto di flesso discendente. La funzione è concava su $]-\infty, -2]$ e su $[0, +\infty]$, mentre è convessa su $[-2, 0]$.

(v) Si stabilisca l'esistenza o meno di zeri della funzione f (senza calcolarli) e si descrivano i segni di f in funzione di questi.

$x_1 = 0$ è uno zero di f. La funzione è crescente su $[-1, 0]$, quindi f è negativa su $[-1, 0[$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, per il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano esiste un secondo zero $x_2 < -1$. Non ci possono essere altri zeri, perché la funzione f è decrescente su $]-\infty, -1]$. Si ha quindi $f)x) > 0$ su $]-\infty, x_2[\cup]0, +\infty[$, e $f(x) < 0$ su $]x_2, 0[$.

(vi) Posto $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ si stabilisca se $x = 0$ è un punto di minimo, massimo, flesso per g.

Si ha $g'(x) = f(x)$ e $g''(x) = f'(x)$. Quindi $g'(0) = 0$, $g''(0) = 1 > 0$, pertanto 0 è punto di minimo per g.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $\varphi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. È noto che $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(i) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si stabilisca per quali valori di α la funzione composta $f_\alpha(x) = \operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)$ è definita su $[0, +\infty[$.

La funzione φ è crescente, quindi $\sup\varphi = \lim_{x\to+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Per essere definito, l'argomento dell'arcoseno deve appartenere all'intervallo $[-1, 1]$, quindi chiediamo $|\alpha\,\varphi(x)| \le 1$ per ogni $x \in [0, +\infty[$. La condizione sarà pertanto soddisfatta se $|\alpha| \le \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

(ii) Per i valori di α calcolati in (i) si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)}{e^{x^2}}\,dx$$

Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)}{e^{x^2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx.$$

Se $\alpha = 0$ l'integrale è nullo. Sia $\alpha > 0$. Poniamo $y = \alpha\varphi(x)$, $dy = \alpha\varphi'(x)\,dx$; si ha $\varphi(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \operatorname{arcsen}\big(y\big)\,dy$$

$$= \frac{1}{\alpha}\Big[y \operatorname{arcsen} y + \sqrt{1-y^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\pi}\operatorname{arcsen}\,(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) + \sqrt{4-\pi} - 2\right).$$

La primitiva della funzione arcoseno è calcolata per parti in modo sfandard. Se $\alpha < 0$ si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}\big(\alpha\,\varphi(x)\big)}{e^{x^2}}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcsen}\big(|\alpha|\,\varphi(x)\big)}{e^{x^2}}\,dx$$