**Esame di Analisi matematica I**

**Prova di esercizi**

**Corso del Professor Franco Obersnel**

**Sessione estiva, II appello**

**COGNOME e NOME** ______________________ **N. Matricola** __________

**Anno di Corso** ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\int_{-x^2}^{x^2} \cos(t^2)\, dt}{2^{x^2}-1} & \text{se } x \neq 0, \\ a & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

dove $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$.

$(i)$ Si determini $a = \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

Usiamo il teorema di de L'Hospital. Calcoliamo la derivata della funzione integrale a numeratore:

$$\frac{d}{dx} \int_{-x^2}^{x^2} \cos(t^2)\, dt = 4x\cos(x^4).$$

La derivata della funzione a denominatore è $2x\, 2^{x^2} \log 2$, quindi, facilmente, il limite del rapporto delle derivate esiste ed è uguale a $2/\log 2$.

$(ii)$ Si calcoli $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

Si osserva che $|\cos(t^2)| \leq 1$, quindi

$$|f(x)| \leq \frac{2x^2}{2^{x^2}-1} \longrightarrow 0$$

per $x \to +\infty$.

Quindi il limite cercato è 0.

$(iii)$ Si calcoli $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

Poiché la funzione $f$ è pari, anche il limite a $-\infty$ è 0.

$(iv)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $\max f$.

Poiché la funzione $f$ è pari è sufficiente studiarla sull'intervallo $[0, +\infty[$. Si prenda $0 < \varepsilon < f(0) = a$. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, esiste $R > 0$ tale che, per ogni $x \in [0, +\infty[$, se $x > R$, si ha $f(x) < \varepsilon < a$. Si ha $f(0) > \varepsilon$, quindi $\sup_{\mathbb{R}} f = \sup f|_{[-R,R]}$. Per il Teorema di Weierstrass, essendo la funzione $f|_{[0,R]}$ continua e definita su un insieme compatto, si ha $\sup f|_{[-R,R]} = \max f|_{[-R,R]}$ e quindi si conclude che $f$ ammette massimo.

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione reale definita da $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \log\left(\dfrac{|x-1|}{|x+1|}\right)$.

($i$) Si determini il dominio $D$ di $f$ e si stabilisca se la funzione $f$ presenta eventuali simmetrie (pari, dispari).

La funzione è dispari essendo $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

($ii$) Si calcolino i limiti di $f(x)$ per $x$ che tende a $-\infty$, $+\infty$ e a eventuali punti di accumulazione del dominio $D$ che non appartengono a $D$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty.$$

($iii$) Si determini l'esistenza di eventuali asintoti obliqui per $f$.

Asintoto a $\pm\infty$ $y = \frac{1}{2}x$.

($iv$) Si calcoli $f'(x) =$

$$\frac{x^2+3}{2(x^2-1)}.$$

($v$) Si determinino gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo e minimo relativi di $f$.

$f$ è crescente su $]-\infty, -1[$ e su $]1, +\infty[$; $f$ è decrescente su $]-1, 1[$. Non ci sono punti di estremo relativo.

($vi$) Si calcoli $f''(x) =$

$$-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

($vii$) Si determinino gli intervalli di convessità e concavità e gli eventuali punti di flesso di $f$.

$f$ concava su $[0, 1[$ e su $]1, +\infty[$. $f$ convessa su $]-\infty, -1[$ e su $]-1, 0]$. $0$ punto di flesso discendente.

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri la successione di numeri reali $(a_n)_n$, dove

$$a_n = \operatorname{arctg}\left(\cosh\left(\frac{n}{2}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)\right).$$

$(i)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se la successione è limitata.

Sì, essendo limitata la funzione arcotangente.

$(ii)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e, in caso affermativo, si calcoli tale limite.

Il limite non esiste. Ad esempio, la sottosuccessione ottenuta considerando $n = 4k$ tende a $\frac{\pi}{2}$, mentre la sottosuccessione ottenuta considerando $n = 4k+2$ tende a $-\frac{\pi}{2}$. Per il teorema sul limite delle sottosuccessioni e per l'unicità del limite si conclude che il limite non può esistere.

$(iii)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(a_n\cdot\operatorname{sen}(a_n)\Big)$ e, in caso affermativo, si calcoli tale limite.

Il limite non esiste; la sottosuccessione ottenuta considerando $n = 4k$ tende a $\frac{\pi}{2}$, mentre la sottosuccessione ottenuta considerando $n$ dispari è la costante 0 e quindi tende a 0.

$(iv)$ Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(a_n\cdot\cos(a_n)\Big)$ e, in caso affermativo, si calcoli tale limite.

Il limite esiste e vale 0. Infatti, per $n = 4k$ la successione tende a $\frac{\pi}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; per $n = 4k+2$ la successione tende a $-\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$; per $n$ dispari la successione è la costante 0 e quindi tende a 0.

**ESERCIZIO N. 4.**

($i$) Si decomponga in frazioni semplici la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(\frac{1}{x-1}\big)$$

($ii$) Si calcoli l'integrale

$$\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$$

$$\frac{1}{4}\Big(\log(3/2) + 1\Big)$$

($iii$) Si calcoli l'integrale

$$\int_2^3 \frac{\log(x^2-1)}{(x-1)^2}\,dx.$$

Si integra per parti, osservando che $\frac{1}{(x-1)^2}$ è la derivata di $-\frac{1}{x-1}$. Pertanto

$$\int_2^3 \frac{\log(x^2-1)}{(x-1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x-1}\log(x^2-1)\Big]_2^3 + 2\int_2^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\log(27/16) + 1\Big).$$