Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

Verifica delle competenze preliminari.

(i) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to-\pi} f(x) = -\infty$.

Per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni x appartenente al dominio della funzione, $x \neq -\pi$, se $|x+\pi| < \delta$ allora $f(x) < M$.

(ii) Si calcoli il limite $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x} - 3x^3 + 4x - 1}{\operatorname{sen}(x) + 5x^3 - 2x + 1}$

$= -\frac{3}{5}$

(iii) Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt + \frac{\log(x)}{x}$.

$$f'(x) = e^{-x^2} + \frac{1-\log x}{x^2}$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3 - 2e^{2x}\right) dx$

$$= \frac{5}{4} - e^2$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0; \\ \int_0^x \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si calcoli $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e si stabilisca se esiste finito o infinito il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Il primo limite è 1, il secondo è finito (chiamiamolo β) perchè la funzione argomento dell'integrale è infinitesima di ordine soprareale a $+\infty$.

(ii) Si calcoli $f'(x)$, se ne studi il segno, si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativo di f.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{se } x < 0; \\ \sqrt{x}\, e^{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi inoltre che la funzione è derivabile anche in 0 con derivata $f'(0) = 0$, come si vede subito applicando il teorema sul limite della derivata. La funzione f pertanto è decrescente in $]-\infty, 0]$ e crescente in $[0, +\infty[$, 0 è punto di minimo assoluto con valore $f(0) = 0$, ed è l'unico punto di estremo relativo per la f. La funzione è superiormente limitata ma non è facile determinare l'esremo superiore, che sarà il maggiore tra 1 e il limite β.

(iii) Si calcoli $f''(x)$, se ne studi il segno, si determinino gli intervalli di convessità e i punti di flesso ascendente e discendente di f.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(2x+1) & \text{se } x < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\left(\frac{1}{2} - x\right) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

La funzione non ha derivata seconda in 0 perché le derivate destra e sinistra non coincidono (sono 0 e $+\infty$). La funzione è concava su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e su $[\frac{1}{2}, +\infty[$, convessa su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Il punto $-\frac{1}{2}$ è un punto di flesso ascendente, il punto $\frac{1}{2}$ è un punto di flesso discendente.

(iv) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, quando $\alpha = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$.

Se $\alpha = -\frac{1}{2}$ l'equazione non ha soluzione e per $\alpha = 0$ c'è soltanto la soluzione $x = 0$. Per valutare il numero delle soluzioni dell'equazione nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$, oppure $\alpha = 2$ dobbiamo stimare il valore del limite β. Vediamo che $\frac{1}{2} < \beta < 2$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t} e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t}\, dt \leq \int_0^1 e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} t e^{-t}\, dt = e^{-1} + 1 < 2$$

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t} e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t}\, dt \geq \int_0^1 t\, e^{-t}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1 - e^{-1} > \frac{1}{2}.$$

Pertanto l'equazione ha due soluzioni se $\alpha = \frac{1}{2}$ e non ha soluzioni se $\alpha = 2$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{|x-1|}{x^2+3x+2}\,dx$$

La funzione integranda ha due singolarità, in $x=-2$ e in $x=-1$. Si tratta quindi di calcolare un integrale generalizzato. La funzione integranda è positiva in un intorno destro di -1 ed è infinita di ordine 1. Pertanto l'integrale è $+\infty$.

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{0}^{2} \frac{|x-1|}{x^2+3x+2}\,dx$$

Scriviamo

$$\int_{0}^{2} \frac{|x-1|}{x^2+3x+2}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1-x}{x^2+3x+2}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Con Hermite si ottiene la rappresentazione

$$\frac{1-x}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2}; \qquad \frac{x-1}{x^2+3x+2} = \frac{-2}{x+1} - +\frac{3}{x+2}.$$

Si calcola allora facilmente l'integrale richiesto e si ottiene $13\log 2 - 8\log 3$.

(iii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{|x-1|}{x^2+3x+2}\,dx$$

La funzione è positiva in un intorno di $+\infty$ ed è infinitesima di ordine 1. Pertanto l'integrale richiesto vale $+\infty$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f(x) = e^{x^2} - x\,\mathrm{sen}(x) - 1$.

(i) Si scriva il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 6 di f.

Si ha

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \longrightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)$$

e

$$x\,\mathrm{sen}(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 + o(x^7)$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{2}{3}x^4 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{5!})\,x^5 + o(x^6)$$

(ii) Si stabilisca se il punto $x = 0$ è di minimo relativo, di massimo relativo o di flesso per la funzione f.

La funzione in un intorno di 0 si comporta come la funzione $\frac{2}{3}x^4$, quindi il punto 0 è un punto di minimo.

(iii) Si calcoli il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} =$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{2}{3}$$

(iv) Si determini una funzione $\varphi(x)$ tale che la funzione $f(x) + \varphi(x)$ sia infinitesima di ordine 6 in $x = 0$.

Ad esempio $\varphi(x) = -\frac{2}{3}x^4$.