

Esame di Analisi matematica I : esercizi
Dr. Franco Obersnel
A.a. 2007-2008, sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

Si risolvano gli esercizi : 1 2 3 4 5 6

ESERCIZIO N. 1. Si consideri l’insieme di numeri reali

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(1/\sqrt{x}) = 0\}.$$

(i) Si descriva E in modo esplicito.

(ii) Si determinino:

• $\inf E =$

• $\sup E =$

• l’insieme dei punti di accumulazione di E :

• l’insieme dei punti isolati di E :

• l’insieme dei punti interni di $\mathcal{C}E$:

(iii) Si dica se esistono $\min E$ e $\max E$.

NB: $\mathcal{C}E$ indica il complementare di E in \mathbb{R} .

ESERCIZIO N. 2. Si denoti con γ l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

e si osservi che $\gamma = \frac{\gamma-1}{2-\gamma}$.

Si consideri la successione $\langle x_n \rangle_n$ definita per ricorrenza da

$$x_0 = 1; \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

i) Si provi che la successione $\langle x_n \rangle_n$ è limitata, ad esempio verificando che, per ogni n , $1 \leq x_n \leq 2$.

ii) Si verifichi che per ogni n pari si ha $x_n < \gamma$ e per ogni n dispari si ha $x_n > \gamma$.

iii) Si stabilisca se la successione $\langle x_n \rangle_n$ è definitivamente monotona.

iv) Si verifichi che la successione $\langle x_{2n} \rangle_n$ è crescente.

v) Si stabilisca (motivando la risposta) se la successione $\langle x_{2n} \rangle_n$ ammette limite e, in caso affermativo, si calcoli tale limite.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - x + 2 \operatorname{arctg}x.$$

(i) Si provi che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è biiettiva.

(ii) Si provi che la funzione inversa di f è derivabile su \mathbb{R} .

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = x \pi^{\frac{1}{x}}.$$

(i) Si determinino:

• il dominio di f :

• i segni di f :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

• $f'(x) =$

• i segni di f' :

• la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f :

• le equazioni degli asintoti al grafico di f a $-\infty$ e a $+\infty$:

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom}f$ dell’equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e)\sqrt{x}} dx.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO

ESERCIZIO N. 6. Si consideri, per $x > 0$, la funzione

$$f(x) = \int_{x+1}^{2x} \cos(1/t) dt$$

(i) Si calcoli $f'(x)$.

(ii) Si determinino, giustificando le risposte,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

- $\text{Ord}_{+\infty} f =$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

- $\text{ord}_1 f =$