

Esame di Analisi matematica I : esercizi  
Dr. Franco Obersnel  
A.a. 2007-2008, sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

Anno di Corso \_\_\_\_\_ Laurea in Ingegneria \_\_\_\_\_

Si risolvano gli esercizi :    1     2         3     4         5     6

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri l’insieme di numeri reali

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \sin(1/\sqrt{x}) = 0\}.$$

(i) Si descriva  $E$  in modo esplicito.

(ii) Si determinino:

•  $\inf E =$

•  $\sup E =$

• l’insieme dei punti di accumulazione di  $E$  :

• l’insieme dei punti isolati di  $E$  :

• l’insieme dei punti interni di  $\mathcal{C}E$  :

(iii) Si dica se esistono  $\min E$  e  $\max E$ .

NB:  $\mathcal{C}E$  indica il complementare di  $E$  in  $\mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO N. 2.** Si denoti con  $\gamma$  l’unica soluzione positiva dell’equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

e si osservi che  $\gamma = \frac{\gamma-1}{2-\gamma}$ .

Si consideri la successione  $\langle x_n \rangle_n$  definita per ricorrenza da

$$x_0 = 1; \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

i) Si provi che la successione  $\langle x_n \rangle_n$  è limitata, ad esempio verificando che, per ogni  $n$ ,  $1 \leq x_n \leq 2$ .

ii) Si verifichi che per ogni  $n$  pari si ha  $x_n < \gamma$  e per ogni  $n$  dispari si ha  $x_n > \gamma$ .

iii) Si stabilisca se la successione  $\langle x_n \rangle_n$  è definitivamente monotona.

iv) Si verifichi che la successione  $\langle x_{2n} \rangle_n$  è crescente.

v) Si stabilisca (motivando la risposta) se la successione  $\langle x_{2n} \rangle_n$  ammette limite e, in caso affermativo, si calcoli tale limite.

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri la funzione

$$f(x) = x^3 - x + 2 \operatorname{arctg}x.$$

(i) Si provi che  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è biiettiva.

(ii) Si provi che la funzione inversa di  $f$  è derivabile su  $\mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO N. 4.** Si consideri la funzione

$$f(x) = x \pi^{\frac{1}{x}}.$$

(i) Si determinino:

• il dominio di  $f$  :

• i segni di  $f$  :

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

•  $f'(x) =$

• i segni di  $f'$  :

• la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di  $f$  :

• le equazioni degli asintoti al grafico di  $f$  a  $-\infty$  e a  $+\infty$  :

(ii) Si determini il numero delle soluzioni  $x \in \text{dom}f$  dell'equazione  $f(x) = \alpha$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 5.** Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e)\sqrt{x}} dx.$$

**RISULTATO**

**SVOLGIMENTO**

**ESERCIZIO N. 6.** Si consideri, per  $x > 0$ , la funzione

$$f(x) = \int_{x+1}^{2x} \cos(1/t) dt$$

(i) Si calcoli  $f'(x)$ .

(ii) Si determinino, giustificando le risposte,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

- $\text{Ord}_{+\infty} f =$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

- $\text{ord}_1 f =$