Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log\left(1+t^\alpha\right) dt}{1-\cos(x^2)}$$

RISULTATO

Il limite è $-\infty$ se $\alpha < 3$. Il limite è $-\frac{1}{2}$ se $\alpha = 3$. Il limite è 0 se $\alpha > 3$.

SVOLGIMENTO

Per ogni $\alpha > 0$ sia il numeratore che il denominatore della funzione in oggetto tendono a zero per $x \to 0$, quindi si può applicare il teorema di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{x^2} \log\left(1+t^\alpha\right) dt}{1-\cos(x^2)} \stackrel{L'H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+x^{2\alpha}\right)\cdot 2x - \log\left(1+x^\alpha\right)}{2x\cdot \operatorname{sen}\left(x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha\left(\frac{\log\left(1+x^{2\alpha}\right)}{x^{2\alpha}}\cdot 2x^{\alpha+1} - \frac{\log\left(1+x^\alpha\right)}{x^\alpha}\right)}{2x^3\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{x^2}}.$$

Dall'espressione scritta si deduce che il limite esiste finito se e solo se $\alpha = 3$, e in questo caso vale $-\frac{1}{2}$. Se invece $\alpha > 3$ il limite è zero, perché il numeratore è infinitesimo di ordine superiore del denominatore. Viceversa se $0 < \alpha < 3$ il limite è $-\infty$.

L'esercizio si semplificava se prima di applicare il teorema di de l'Hôpital si moltiplicava e divideva per x^4 e si utilizzava il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos(x^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{1-\cos(y)} = 2$.

L'esercizio si poteva risolvere anche utilizzando l'approsimazione $\log(1+x) = x + o(x)$, per cui

$$\frac{\int_x^{x^2} \log\left(1+t^\alpha\right) dt}{1-\cos(x^2)} = \frac{\int_x^{x^2}\left(t^\alpha + o(t^\alpha)\right) dt}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^5)} = \frac{\frac{1}{\alpha+1}\left(x^{2\alpha+1} - x^{\alpha+1}\right) + o(x^{\alpha+1})}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^5)} = \frac{-\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big(1+o(x)\Big)}{\frac{1}{2}x^4\Big(1+o(x)\Big)}$$

e si concludeva come sopra.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \frac{1}{n}$ se $t \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, con $n \in \mathbb{N}^+$.

(i) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la funzione f è primitivabile su $]0,1]$.

La funzione f non può essere primitivabile, per il teorema sul limite della derivata. Infatti la funzione f presenta delle discontinuità di tipo salto in tutti i punti $x = \frac{1}{n}$.

(ii) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la funzione f è integrabile su $]0,1]$.

Sì, per il teorema di integrabilità delle funzioni monotone (la f è crescente).

(iii) Si calcoli

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(t)\,dt =$$

Si ha

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dt = \frac{7}{12}.$$

(iv) Si verifichi che

$$\frac{1}{2} < \int_{0}^{1} f(t)\,dt < 1.$$

Si ha $t \leq f(t) \leq 1$ per ogni $t \in]0,1]$. Pertanto

$$\frac{1}{2} = \int_{0}^{1} t\,dt \leq \int_{0}^{1} f(t)\,dt \leq \int_{0}^{1} 1\,dt = 1.$$

Le disuguaglianze strette si ottengono facilmente osservando ad esempio che $f(t) \leq \frac{1}{3}$ su $]0, \frac{1}{3}]$ e quindi

$$\int_{0}^{1} f(t)\,dt = \int_{0}^{\frac{1}{3}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{9} + \frac{7}{12} < 1$$

e inoltre

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{12} = \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(t)\,dt \leq \int_{0}^{1} f(t)\,dt.$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{(1-|x-1|)^2}{\sqrt{|x|}}$$

(i) Si determinino il dominio, gli zeri e i segni di f:

$dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha $f(x) = \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$ se $x \geq 1$ e $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ se $x < 1$, $x \neq 0$. Si ha $f(2) = 0$, $f(x) > 0$ per ogni $x \in dom f$, $x \neq 2$. Si noti che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

(ii) Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è derivabile e si calcoli la derivata di f in questi punti.

Si ha $f'(x) = \frac{3x^2-4x-4}{2x^{\frac{3}{2}}}$ se $x > 1$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ se $x \in]0,1[$, $f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{-x}$ se $x < 0$. La funzione f non è derivabile nel punto 1, nel quale si ha $f'_-(1) = \frac{3}{2}$ e $f'_+(1) = -\frac{5}{2}$. Si noti che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

Si ha $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e se $x \in]1,2[$. $f'(x) > 0$ se $x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$.

(iii) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f.

La funzione è crescente in $]0,1]$ e in $[2,+\infty[$. La funzione è decrescente in $]-\infty,0[$ e in $[1,2]$. Il punto 1 è punto di massimo relativo con $f(1) = 1$, il punto 2 è punto di minimo assoluto con valore $f(2) = 0$. Si ha chiaramente $\sup f = +\infty$.

(iv) Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è due volte derivabile e si calcoli la derivata seconda di f in questi punti.

Si ha $f''(x) = \frac{3x^2+4x+12}{4x^{\frac{5}{2}}}$ se $x > 1$, $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{|x|}}$ se $x < 1$, $x \neq 0$. Si noti che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in dom f$, $x \neq 1$.

(v) Si determinino gli intervalli di concavità, convessità e i punti di flesso di f.

La funzione è convessa su $]-\infty,0[$, su $]0,1]$ e su $[1,+\infty[$. Si noti che invece non è convessa su $]0,+\infty[$!

(vi) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Se $\alpha < 0$ zero soluzioni.

Se $\alpha = 0$ una soluzione.

Se $0 < \alpha < 1$ quattro soluzioni.

Se $\alpha = 1$ tre soluzioni.

Se $\alpha > 1$ due soluzioni.

OSSERVAZIONE:

Si osservi che la funzione a sinistra del punto 1 è una potenza del tipo $|x|^\alpha$. Il suo grafico è ben noto. Quindi ci si poteva limitare allo studio della funzione a destra di 1 e si ottenevano tutte le informazioni richieste con un notevole risparmio di tempo.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^{\log x} e^{-t^2}\, dt.$$

(i) Si determinino il dominio $dom f$, gli zeri e i segni di f:

$dom f =]0, +\infty[$, si ha $\log x < 0$ se $x < 1$ e $\log x > 0$ se $x > 1$, $\log 1 = 0$, $e^{-t^2} > 0$ per ogni t. Pertanto $f(x) < 0$ se $0 < x < 1$, $f(x) > 0$ se $x > 1$, $f(1) = 0$.

(ii) Si provi che per ogni $x \in dom f$ si ha $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$:

Con il cambio di variabile $s = -t$ si ottiene

$$f(\tfrac{1}{x}) = \int_0^{-\log x} e^{-t^2}\, dt = -\int_0^{\log x} e^{-s^2}\, ds = -f(x).$$

(iii) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = e^{-\log^2(x)} \cdot \frac{1}{x}; \qquad f''(x) = -e^{-\log^2(x)} \cdot \frac{1}{x^2}\big(1 + 2\log x\big).$$

(iv) Si determinino gli intervalli di concavità, convessità e i punti di flesso di f:

Si ha $f''(x) = 0$ se $x = e^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) > 0$ se $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) < 0$ se $x > e^{-\frac{1}{2}}$. Pertanto f è convessa su $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$, concava su $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ e $x = e^{-\frac{1}{2}}$ è un punto di flesso discendente.

(v) Si provi che la funzione f è limitata sul suo dominio:

Osserviamo che $f'(x) > 0$ su $dom f$, quindi la funzione f è crescente, $\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. La funzione e^{-t^2} è infinitesima di ordine soprareale a $+\infty$. Per il criterio dell'ordine di infinitesimo degli integrali generalizzati l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ è finito. Di conseguenza

$$\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, per la simmetria provata in (ii),

$$\inf f = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\tfrac{1}{x}) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}.$$