

Esame di Analisi matematica I : esercizi
Dr. Franco Obersnel
A.a. 2006-2007, sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

Si risolvano gli esercizi : 1 2 3 4 5 6

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi} |\arcsen(\sen(\pi x))|.$$

(i) Si determini il dominio di f .

(ii) Si verifichi che f è una funzione pari:

(iii) Si verifichi che f è periodica di periodo 1:

(iv) Si disegni il grafico della funzione f .

(v) Si ponga $g(x) = e^{f(x)}$ per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si scriva esplicitamente l’espressione della funzione inversa di g , specificandone il dominio.

ESERCIZIO N. 2. Si considerino gli insiemi di numeri reali

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 2\}, \quad F = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}, \quad G = \{0, 2, 4\}.$$

(i) Si determinino

• l'insieme dei punti di accumulazione di $E \cup F \cup G$:

• l'insieme dei punti isolati di $E \cup G$:

• l'insieme dei punti interni a $F \cup (E \cap G)$:

• $\inf(E \cup F) =$

• $\sup(F \cup G) =$

(ii) Si stabilisca se esistono $\min(E \cup G)$ e $\max(F \cup G)$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + x^2 - x - 3.$$

(i) Si provi che f ha almeno due radici reali di segno opposto.

(ii) Si provi che f ha esattamente due radici reali.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| + e^{-2x}.$$

(i) Si determinino

• il dominio di f :

• i segni di f :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

• $f'(x) =$

• $f'_-(0) =$

• $f'_+(0) =$

• i segni di f' :

• la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f :

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \text{dom} f$ dell'equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 5. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 + x.$$

(i) Si provi che esiste almeno un punto $\xi \in [0, 2]$ tale che $\int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi)$.

(ii) Si determini un tale punto ξ .

ESERCIZIO N. 6. Si consideri, per $x \geq 0$, la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} \sqrt{t} e^t dt.$$

(i) Si calcoli $f'(x)$.

(ii) Si provi che f è crescente su $[0, +\infty[$.

(iii) Si provi che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(iv) Si provi che $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ è biiettiva.