Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{x}\Big(\sqrt[3]{x^2+3x} - \sqrt[3]{x^2-3x}\Big)$.

(i) Si calcoli il limite $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

Si ha $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot |x|^{2/3} \cdot \left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} - \sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}\right)$.

Perciò, sottraendo e sommando 1 e scrivendo $x = \frac{3}{\frac{3}{x}}$ si ottiene

$$f(x) = 3\left(\frac{(1+3/x)^{1/3}-1}{3/x} + \frac{(1-3/x)^{1/3}-1}{-3/x}\right)$$

da cui facilmente il risultato, usando il limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha.$$

(ii) Si calcoli il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Valgono i conti visti sopra.

(iii) Si stabilisca se f è derivabile in 0.

Il calcolo della derivata di $f(x)$ è lungo e non necessario. È preferibile usare la definizione di derivata in 0:

$$|f'(0)| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\sqrt[3]{1+3/x} + \sqrt[3]{3/x-1}\right| = +\infty.$$

Pertanto la funzione non è derivabile in 0.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{(x-2)^2 - |x^2-4x|}{\sqrt{|x|}}$.

(*i*) Si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Si osservi che si ha $f(x) = \frac{4}{\sqrt{|x|}}$ se $x < 0$ oppure $x \geq 4$;

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}(x^2 - 4x + 2)$ se $0 < x < 4$.

(*ii*) Si stabilisca se f è derivabile nel suo dominio e si calcoli f' nei punti di derivabilità ed eventualmente le derivate destra e sinistra nei punti di non derivabilità.

Si ha $f'(x) = 2|x|^{-3/2}$ se $x < 0$, $f'(x) = -2x^{-3/2}$ se $x > 4$.

$f'(x) = \frac{3x^2-4x-2}{x\sqrt{x}}$ se $0 < x < 4$.

f non è derivabile in $x = 4$, infatti $f'_-(4) = \frac{15}{4} \neq -\frac{1}{4} = f'_+(4)$.

(*iii*) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.

f ha un solo punto critico che è l'unica soluzione appartenente all'intervallo $]0,4]$ dell'equazione $3x^2-4x-2 = 0$, ovvero $x_0 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty, 0[\cup]x_0, 4[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in]0, x_0[\cup]4, +\infty[$

(*iv*) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f.

f è crescente sugli intervalli $]-\infty, 0[$ e $[x_0, 4]$; f è decrescente sugli intervalli $]0, x_0]$ e $[4, +\infty[$.

Vi è un punto di minimo relativo che è anche assoluto: $\min f = f(x_0)$; si osservi che il minimo è negativo essendo $f(1) = -2 < f(x_0)$. Vi è un punto di massimo relativo in $x = 4$ (punto in cui non esiste la derivata), non assoluto; $\sup f = +\infty$.

(*v*) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Abbiamo già osservato che $f(x_0) < 0$.

L'equazione $f(x) = \alpha$ non ha soluzioni se $\alpha < f(x_0)$;

ha 1 soluzione se $\alpha = f(x_0)$;

ha 2 soluzioni se $f(x_0) < \alpha \leq 0$ oppure se $f(4) < \alpha$;

ha 4 soluzioni se $0 < \alpha < f(4)$;

ha 3 soluzioni se $\alpha = f(4)$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt.$$

(i) Si calcoli $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x}(1+\frac{1}{x^2})} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 0$$

per ogni $x \in]0, +\infty[$.

(ii) Si determinino i punti critici di f.
ogni $x \in]0, +\infty[$

(iii) Si calcoli $f(1)$.

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt - 0 = \int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\log(1+t^2)\,dt = \frac{1}{2}\log 2$$

(iv) Si calcoli $f(2016)$.
Poiché la funzione f ha derivata nulla su un intervallo, f è una funzione costante, pertanto $f(2016) = f(1) = \frac{1}{2}\log 2$.

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si scriva il polinomio di Taylor (Maclaurin) relativo al punto $x_0 = 0$ di ordine 3 della funzione

$$f(x) = \log(1 + x) :$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

(ii) Si scriva il polinomio di Taylor (Maclaurin) relativo al punto $x_0 = 0$ di ordine 8 della funzione

$$\varphi(x) = \cosh(x) + \cos(x) - 2 :$$

$$1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - 2 =$$
$$= \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{8!}x^8$$

(iii) Si scriva il polinomio di Taylor (Maclaurin) relativo al punto $x_0 = 0$ di ordine 6 della funzione

$$g(x) = f(\varphi(x)) = \log(1 + \cosh(x) + \cos(x) - 2) :$$

Si ha

$$f(\varphi(x)) = \log\Big(1 + (\frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{8!}x^8 + o(|x|^8))\Big) =$$
$$= \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{8!}x^8 + o(|x|^8) - \frac{1}{2}(\frac{2}{4!}x^4 + \frac{2}{8!}x^8 + o(|x|^8))^2 + o(|x|^{11}) = \frac{2}{4!}x^4 + o(|x|^7),$$

quindi $P_6 = \frac{2}{4!}x^4$.

(iv) Si determini l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione $g(x) = f(\varphi(x)) = \log(\cosh(x) + \cos(x) - 1)$:
Poiché $g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ e $g^{iv}(0) \neq 0$ l'ordine è 4 per il corollario del Lemma di Peano.