Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** ________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________	

ESERCIZIO N. 1. Si considerino le funzioni

$$f(x) = \int_{x^2}^{x} \log(1+t^2)\, dt, \qquad g(x) = x - \sin x.$$

(*i*) Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

usando il Teorema di de l'Hôpital, calcolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - 2x\log(1+x^4)}{1-\cos x} \overset{l'H}{=}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2\log(1+x^4) - 2x\frac{4x^3}{1+x^4}}{\operatorname{sen} x} = 2$$

(*ii*) Si determini l'ordine di infinitesimo della funzione f in 0: $ord_0 f =$

$$\operatorname{ord}_0 f = \operatorname{ord}_0 g = 3$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f(x) = x - (x-1)\log|x-1|$.

(i) Si determini il dominio di f. Si verifichi che la funzione f può essere estesa per continuità ad una funzione definita su $\mathbb{R}$. **D'ora in poi il simbolo f indicherà tale estensione.**

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ definisco $f(1) := 1$

(ii) Si determinino

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = (x-1)\log|x-1| \left[\frac{x}{(x-1)\log|x-1|} - 1 \right]$

- $f'(x) = -\log|x-1|$ se $x \neq 1$

- $f'(1) = +\infty$

- i segni di f':

$f'(x) > 0$ se $x \in]0,2[$ $f'(0) = f'(2) = 0$

$f'(x) < 0$ su $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

- la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f:

f crescente su $[0,2]$, f decrescente su $]-\infty,0]$ e su $[2,+\infty[$

0 punto di minimo relativo $f(0) = 0$

2 punto di massimo relativo $f(2) = 2$

$\inf f = -\infty$ $\sup f = +\infty$

(Continua nella pagina seguente)

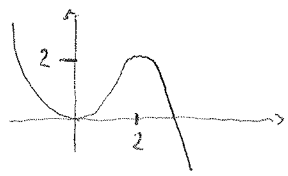
COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** ________

• il numero delle soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione $f(x) = \gamma$, al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

1 soluzione se $\gamma > 2$ o $\gamma < 0$

2 soluzioni se $\gamma = 0$ o $\gamma = 2$

3 soluzioni se $0 < \gamma < 2$



(*iii*) Si provi che la funzione f ammette uno ed un solo zero positivo α e che $\alpha \in]3,5[$ (suggerimento: può essere utile osservare che $e^5 < 3^5 = 243 < 256 = 4^4$).

$f(0)=0$ f crescente su $[0,2]$, quindi f non ha zeri su $]0,2]$; f decrescente su $[2,+\infty[$, quindi f ha al più uno zero in $]2,+\infty[$. Per il Teorema degli zeri di Bolzano, essendo f continua in $[3,5]$, $f(3) = 3 - \log 4 > 0$ e $f(5) = 5 - \log 4^4 < 0$, esiste uno zero di f $\alpha \in]3,5[$.

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x} + e^x - 2}$.

(*i*) Si determinino, giustificando la risposta,

• l'ordine di infinitesimo di f in $+\infty$: $ord_{+\infty} f =$ soprareale

essendo $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{2x}+e^x-2} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

• l'ordine di infinito di f in 0: $Ord_0 f =$ 1

essendo $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^\alpha}{e^{2x}+e^x-2} = \dfrac{1}{3}$ se $\alpha = 1$

(*ii*) Si stabilisca, giustificando la risposta, se la funzione f è integrabile in senso generalizzato

• sull'intervallo $[1, +\infty[$:

Sì, perché $ord_{+\infty} f > 2$

• sull'intervallo $]0, 1]$

NO, perché $Ord_0 f = 1$

(continua nella pagina seguente)

(*iii*) Si determini una primitiva della funzione f.

$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^{x}-2}\,dx = \int \frac{1}{y(y+2)(y-1)}\,dy \qquad \text{con } y = e^{x},\; dy = y\,dx$$

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{y-1} = \frac{1}{y(y+2)(y-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+2C=0 \\ -2A=1 \end{cases} \qquad A=-\tfrac{1}{2} \qquad B=\tfrac{1}{6} \qquad C=\tfrac{1}{3}$$

$$\int\left(\frac{-1/2}{y} + \frac{1/6}{y+2} + \frac{1/3}{y-1}\right)dy \underset{y=e^x}{=} -\frac{1}{2}\log|y| + \frac{1}{6}\log|e^x+2| + \frac{1}{3}\log|e^x-1|$$

$\Rightarrow$ una primitiva di f è $F(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\log(e^x+2) + \frac{1}{3}\log(e^x-1)$

Si osservi che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{y\to+\infty} \log\left(\frac{(y+2)(y-1)^2}{y^3}\right)^{1/6} = 0$

(*iv*) Si calcoli $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. $= \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(1)\right] =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\log(e+2) - \frac{1}{3}\log(e-1)$$