

Esame di Analisi matematica I : esercizi
Dr. Franco Obersnel
A.a. 2007-2008, sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

Si risolvano gli esercizi : 1 2 3 4 5 6

ESERCIZIO N. 1. È data una successione di numeri reali $(x_n)_n$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < 1$. Supponiamo inoltre che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = \gamma.$$

(i) Si provi che esiste e si calcoli il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(x_n) =$$

(ii) Si calcoli

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1-y}{\log y} =$$

(iii) Si verifichi, utilizzando il limite calcolato in (ii), che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(x_n - 1)}{\log x_n^n} = 1.$$

(iv) Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - x_n) =$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2.$$

Si determinino

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

- $f'(x) =$

- i segni di f' :

- la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f :

- i segni di f :

- $f''(x) =$

- i segni di f'' :

- la concavità, la convessità, i punti di flesso di f :

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = x e^x.$$

(i) Si provi che la restrizione di f all’intervallo $[-1, +\infty[$ è iniettiva.

(ii) Si determini l’immagine della restrizione di f all’intervallo $[-1, +\infty[$.

(iii) Si calcoli $(f^{-1})'(-1/e)$.

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x| + \sin x. \quad \text{se } x \in [-\pi, \pi].$$

Si determinino:

- $f'(x) =$

- $f'_-(0) =$

- $f'_+(0) =$

- i segni di f' :

- la crescita, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di f :

- i segni di f :

- $f''(x) =$

- i segni di f'' :

- la concavità, la convessità, i punti di flesso di f :

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 5. Si calcoli l’integrale generalizzato

$$\int_0^1 (x^x + \log(x^{x^x})) dx.$$

RISULTATO

SVOLGIMENTO (Suggerimento: si calcoli la derivata di x^x .)

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_t^{2t} \frac{1}{1+s^4} ds \right) dt.$$

(i) Si calcolino

- $f'(x) =$

- $f''(x) =$

- $f'''(x) =$

- il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 di f :

(ii) Si determini, giustificando la risposta, $\text{ord}_0 f$.

(iii) Si provi che f è monotona in $]0, +\infty[$.

(iv) Si dimostri che esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.