Esame di Analisi matematica I
Prova di esercizi
Corso del Professor Franco Obersnel
Sessione "autunnale", appello unico

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si determinino gli asintoti obliqui a $-\infty$ e a $+\infty$ della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+4x-1}$.

RISULTATO

$y = x + 2$ e $y = -x - 2$.

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Per cercare l'asintoto a $-\infty$ calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = -1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x)+x\Big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\Big(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\Big)}{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}|x|\Big(\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\Big) = -2$$

e quindi l'asintoto è $y = -x - 2$.

Il calcolo per l'asintoto a $+\infty$ è simile (e più facile). L'equazaione è $y = x + 2$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione polinomiale

$$f(x) = x^6 + 16\big(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1\big) = x^6 + \big((2x+1)^2 - 5\big)^2.$$

(*i*) Si calcolino tutte le derivate di ogni ordine $n \in \mathbb{N}$ di f.
$f'(x) = 6x^5 + 16(4x^3 + 6x^2 - 2x - 2)$; $f''(x) = 30x^4 + 32(6x^2 + 6x - 1)$;
$f''(x) - 120x^3 + 32(12x + 6)$; $f^{iv}(x) = 360x^2 + 384$; $f^{v}(x) = 720x$;
$f^{vi}(x) = 720$; $f^{(n)}(x) = 0$ per ogni $n \geq 7$.

(*ii*) Si ponga $g = f''$. Si provi che g è convessa su $\mathbb{R}$ e possiede esattamente due zeri reali $x_1 < 0 < x_2$. Si studino i segni di g negli intervalli $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$.

$g''(x) = 24(15x^2 + 16) > 0$ per ogni x, perciò g c̀onvessa su $\mathbb{R}$ e come tale non può avere più di due zeri. Per il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano, essendo $g(0) = -32 < 0$ e $\lim\limits_{x \to \mp\infty} g(x) = +\infty$ devono esistere $x_1 < 0 < x_2$ con $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Si osserva che necessariamente $g(x) > 0$ se $x < x_1$ o $x > x_2$, mentre $g(x) = 0$ in $]x_1, x_2[$, In particolare, poiché $g = f''$, si ha che f è convessa su $]-\infty, x_1]$ e su $[x_2, +\infty[$, mentre f è concava su $[x_1, x_2]$. Inoltre, x_1 è punto di flesso discendente mentre x_2 è punto di flesso ascendente per f.

(*iii*) Si ponga $h = f'$. Si studino gli intervalli di monotonia della funzione h e si provi che h ha esattamente tre zeri reali $z_1 < -1 < z_2 < 0 < z_3$.

Si osserva che $h' = f'' = g$ e quindi gli intervalli di monotonia della h sono stati studiati nel punto precedente, in particolare si ha h crescente in $]-\infty, x_1]$ e $[x_2, +\infty[$, mentre h è decrescente in $[x_1, x_2]$. Il punto x_1 è di massimo relativo, il punto x_2 è di minimo relativo. Per l'osservazione fatta la funzione h non può avere più di tre zeri. D'altra parte, applicando nuovamente il teorema di Bolzano si verifica facilmente l'esistenza dei tre punti, infatti $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty < 0$, $h(-1) = 26 > 0$, $h(0) = -32 < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty > 0$. Si ottiene inoltre che $h(x) > 0$ se $x \in]z_1, z_2[\cup]z_3, +\infty[$ mentre $h(x) < 0$ se $x \in]-\infty, z_1[\cup]z_2, z_3[$.

(*iv*) Si provi che la funzione f ammette esattamente due punti di flesso, esattamente due punti di minimo relativo e un punto di massimo relativo.

La prima parte è già stata studiata nel punto (*ii*). Nel punto (*iii*) abbiano studiato i segni della funzione $h = f'$, pertanto si ottengono immediatamente gli intervalli di monotonia della f e si deduce che i punti z_1 e z_3 sono di minimo relativo mentre il punto z_2 è di massimo relativo.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^4 \operatorname{sen} x}}{2^{x^2} - 1} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Si verifichi che f è continua in 0.

Si ha, usando noti limiti notevoli,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} -x \Big(\frac{(1 - 3x \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} - 1}{-3x \operatorname{sen} x} \cdot \frac{-3x \operatorname{sen} x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2^{x^2} - 1} \Big) = 0$$

(ii) Si calcoli $f'(0)$

Si ha, usando noti limiti notevoli,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} -\Big(\frac{(1 - 3x \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}} - 1}{-3x \operatorname{sen} x} \cdot \frac{-3x \operatorname{sen} x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2^{x^2} - 1} \Big) = (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-3) \cdot \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}.$$

ESERCIZIO N. 4. Si ponga $g(t) = \dfrac{t+2}{t^2+4t+3}$ e si consideri la funzione $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} g(t)\,dt$.

(i) Si calcoli una primitiva di g su $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Si ha, usando ad esempio il metodo di Hermite,

$$\frac{t+2}{t^2+4t+3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+3}\Big).$$

Pertanto una primitiva è $G(t) = \log\big(\sqrt{(t+1)(t+3)}\big)$.

(ii) Si calcoli $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{4x+4}{4x^2+8x+3} - \frac{x+2}{x^2+4x+3} = \frac{4x^2+9x+6}{(4x^2+8x+3)(x^2+4x+3)}.$$

(iii) Si calcolino $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) =$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \log\Big(\sqrt{\frac{4x^2+8x+3}{x^2+4x+3}}\Big) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log\Big(\sqrt{\frac{4x^2+8x+3}{x^2+4x+3}}\Big) = \log(2).$$

(iv) Si determini il numero degli zeri di f in $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

La funzione vale 0 in $x = 0$. Poiché la derivata $f'(x)$ è positiva in $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, la funzione f è crescente e quindi ha un unico zero.