Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Verifica delle competenze preliminari.

(i) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to e} f(x) = -\infty$.

Per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in dom f$, se $0 < |x-e| < \delta$, allora $f(x) < M$.

(ii) Si calcoli il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+2x-3}{1-5x^2} \log(1+e^{-x})$

$$\frac{x^4+2x-3}{1-5x^2} \log(1+e^{-x}) = \frac{x^4+2x-3}{1-5x^2}\, e^{-x}\, \frac{\log(1+e^{-x})}{e^{-x}} \to 0$$

(iii) Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \int_x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt + 2^{\frac{1}{x}}$.

$$-\operatorname{sen}(x^2) - \frac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} \log 2$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx$

$$= \frac{1}{4}(e^2+1)$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1; \\ (x^2-1)^2 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(i) Si determinino eventuali simmetrie della funzione f. Si determinino i segni e si calcolino i limiti $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

f pari, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(-1) = f(1) = 0$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Si calcoli, dove possibile, $f'(x)$ e si stabilisca se $f \in C^1(\mathbb{R})$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} \left(-\frac{2x}{(x^2-1)^2} \right) & \text{se } |x| < 1; \\ 2(x^2-1)\,2x & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Si osservi che la funzione è derivabile anche nei punti ± 1 con derivata nulla. La funzione è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$.

(iii) Si studi il segno di f', si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativo di f.

$f'(x) = 0$ se $x \in \{-1, 0, 1\}$. $f'(x) > 0$ su $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. f è decrescente su $]-\infty, -1]$ e su $[0, 1]$; crescente su $[-1, 0]$ e su $[1, +\infty[$. $0 = \min f$ (punti di minimo -1, 1). 0 punto di massimo con $f(0) = e^{-1}$.

(iv) Si stabilisca se esiste e, in caso affermativo, si determini, un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, tale che il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$ è esattamente 3.

Disegnando il grafico della funzione si trova subito $\alpha = e^{-1}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. È nota una funzione $f \in C^2(\mathbb{R})$ che verifica $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$ e

$$\int_0^1 f(x)\, e^x\, dx = 3.$$

(i) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 f'(x)\,\big(e^x - 1\big)\, dx$$

$$\int_0^1 f'(x)\,\big(e^x - 1\big)\, dx = \Big[f(x)\,\big(e^x - 1\big)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x)\, e^x\, dx = 2e - 5$$

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 f''(x)\,\big(e^x - 1\big)\, dx$$

$$\int_0^1 f''(x)\,\big(e^x - 1\big)\, dx = \Big[f'(x)\,\big(e^x - 1\big)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\, e^x\, dx = 2e.$$

(iii) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\big(\mathrm{tg}(x)\big)\ \exp\big(\mathrm{tg}(x)\big)\ \big(1 + \mathrm{tg}^2(x)\big) dx$$

Immediato con il cambio di variabile $y = \mathrm{tg}(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\big(\mathrm{tg}(x)\big)\ \exp\big(\mathrm{tg}(x)\big)\ (1 + \mathrm{tg}^2(x))\, dx = \int_0^1 f(y)\, e^y\, dy = 3.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, dt & \text{se } x < 0; \\ \operatorname{sen}(x^2) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^4)\, 2x & \text{se } x < 0; \\ \cos(x^2)\, 2x & \text{se } x > 0. \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \cos(x^4)\, 8x^4 + 2\operatorname{sen}(x^4) & \text{se } x < 0; \\ -\operatorname{sen}(x^2)\, 4x^2 + 2\cos(x^2) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si noti che f è derivabile in zero e $f'(0) = 0$.
Invece f non è due volte derivabile in 0 essendo $f''_-(0) = 0$, $f''_+(0) = 2$.

(ii) Si stabilisca se $f \in C^n(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, 2$.

$f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$.

(iii) Si determinino i punti critici di f.

$-\sqrt[4]{k\pi}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$.