Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ____________________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ____________________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro naturale $n \in \mathbb{N}^+$ si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^n} \operatorname{sen}(1-\cos t)\,dt}{x^n + \displaystyle\int_{x^n}^0 \cos(\operatorname{sen} t)\,dt}.$$

RISULTATO

1

SVOLGIMENTO

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia il numeratore che il denominatore della funzione in oggetto tendono a zero per $x \to 0$, quindi si può applicare il teorema di de l'Hôpital. Si usano poi noti limiti notevoli.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^n} \operatorname{sen}(1-\cos t)\,dt}{x^n + \displaystyle\int_{x^n}^0 \cos(\operatorname{sen} t)\,dt} \Leftarrow^{L'H} \lim_{x\to 0^+} \frac{nx^{n-1}\operatorname{sen}(1-\cos(x^n))}{nx^{n-1}\Big(1-\cos(\operatorname{sen}(x^n))\Big)} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(1-\cos(x^n))}{1-\cos(x^n)} \frac{1-\cos(x^n)}{x^{2n}} \frac{x^{2n}}{\operatorname{sen}^2(x^n)} \frac{\operatorname{sen}^2(x^n)}{\Big(1-\cos(\operatorname{sen}(x^n))\Big)} = 1$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(x) = \text{arctg } (x) - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(i) Si studino il dominio, eventuali simmetrie di φ e i limiti $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x)$:

Il dominio è $\mathbb{R}$, la funzione φ è dispari. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} \varphi = \frac{\pi-4}{2} < 0$, $\lim_{x\to-\infty} \varphi = \frac{-\pi+4}{2} > 0$.

(ii) Si calcoli la derivata di φ.

$$\varphi'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

(iii) Si determinino

• i segni della derivata di φ:

Si ha $\varphi'(x) > 0$ se $|x| > \sqrt{3}$.

• gli intervalli di monotonia di φ:

La funzione φ è crescente su $]-\infty, -\sqrt{3}]$ e su $[\sqrt{3}, +\infty[$, mentre è decrescente su $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

• gli zeri e i segni della funzione φ:

Si ha $\varphi(0) = 0$. Per $x > 0$ la funzione è dapprima decrescente, e quindi negativa, e poi crescente tendendo a un numero negativo, quindi deve essere negativa sull'intero intervallo $]0, +\infty[$. Per simmetria si ha che $\varphi(x) > 0$ per ogni $x < 0$.

(iv) Si disegnino sullo stesso diagramma cartesiano i grafici delle funzioni arctg (x) e $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

La cosa importante da osservare è che il grafico di arctg (x) sta sotto il grafico di $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ su $[0, +\infty[$ e, al contrario, il grafico di arctg (x) sta sopra il grafico di $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ su $]-\infty, 0]$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. (Per risolvere questo esercizio potrebbero essere utili alcune informazioni ottenute nell'esercizio 2.) Per ogni parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = \begin{cases} \text{arctg } (x) & \text{se } x < a, \\ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

(i) Si determinino

• l'insieme dei parametri $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f_a è continua su $\mathbb{R}$:

La funzione f_a è continua se e solo se $\varphi(a) = 0$, quindi se e solo se $a = 0$.

• l'insieme dei parametri $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f_a è derivabile su $\mathbb{R}$:

Per nessun $a \in \mathbb{R}$ la funzione f_a è derivabile.

(ii) Si determini l'insieme dei parametri $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f_a è iniettiva su $\mathbb{R}$:

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la funzione f_a è chiaramente crescente su $]-\infty, a[$ e su $[a, +\infty[$. Poiché arctg $(a) < \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ se $a > 0$, la funzione f_a salta verso l'alto nel punto $x = a$ e quindi f_a è crescente su $\mathbb{R}$. Quindi f_a è iniettiva se $a \geq 0$. Invece, se $a < 0$, $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} <$ arctg (a), la funzione f_a salta verso il basso nel punto $x = a$, e quindi i valori dell'intervallo $[\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}, \text{arctg } (a)[$ se $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} > -\frac{\pi}{2}$, o dell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \text{arctg } (a)[$ se $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \leq -\frac{\pi}{2}$ vengono assunti due volte dalla funzione e f_a non è iniettiva.

(iii) Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ si determini l'insieme immagine di f_a: $f_a(\mathbb{R})$.

Se $-\frac{\pi}{2} < \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \leq 0$ si ha $f_a(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, 2[$. Se $\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \leq -\frac{\pi}{2}$ si ha $f_a(\mathbb{R}) = [\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}, 2[$. Se $a > 0$ si ha $f_a(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, 2[\setminus [\text{arctg } (a), \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}[$.

(iv) Si ponga $a = 1$. Sia f_1^{-1} la funzione inversa di f_1 (definita su $f_1(\mathbb{R})$).

• Si stabilisca se la funzione f_1^{-1} è continua sul suo dominio.

Si osservi che la funzione f_1^{-1} è definita sull'insieme $]-\frac{\pi}{2}, 1[\cup[\sqrt{2}, 2[$ (che non è un intervallo). La funzione f_1^{-1} è l'inversa di una funzione monotona definita su un intervallo, e quindi è continua.

• Si stabilisca se la funzione f_1^{-1} è derivabile sul suo dominio. Si calcoli la derivata dell'inversa nel punto $y = \sqrt{2}$: $\left(f_1^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

L'unico dubbio può esserci nel punto $y = \sqrt{2} = f(1)$. Si osservi che il dominio $]-\frac{\pi}{2}, 1[\cup[\sqrt{2}, 2[$ della funzione f_1^{-1} è unione di due intervalli e il punto $y = \sqrt{2}$ è l'estremo sinistro di uno di questi intervalli. Quindi la derivata di f_1^{-1} nel punto $\sqrt{2}$ coincide con la sua derivata destra e, per il teorema sulla derivata della funzione inversa, si ha $\left(f_1^{-1}\right)'(\sqrt{2}) = \frac{1}{(f_1)'_+(1)} = \sqrt{2}$.

ESERCIZIO N. 4. Per ogni parametro $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,(x) & \text{se } x < a, \\ \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{se } x \geq a. \end{cases}$$

(*i*) Si calcoli una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione arctg (x).

$$F(x) = x \cdot \text{arctg}\,(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

(*ii*) Si calcoli una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$F(x) = 2\sqrt{x^2+1}$$

(*iii*) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si calcoli l'integrale

$$\int_{-2a}^{2a} f_a(t)\,dt$$

Se $a = 0$ l'integrale è zero. Sia $a > 0$. Allora $a < 2a$ e si può calcolare

$$\int_{-2a}^{2a} f_a(t)\,dt = \int_{-2a}^{a} \text{arctg}\,(t)\,dt + \int_{a}^{2a} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$$

$$= a\big(\text{arctg}\,(a) - 2\text{arctg}\,(2a)\big) + \frac{1}{2}\log\big(\frac{4a^2+1}{a^2+1}\big) + 2\big(\sqrt{4a^2+1} - \sqrt{a^2+1}\big).$$

Sia $a < 0$. Allora $2a < a$ e si può calcolare

$$\int_{-2a}^{2a} f_a(t)\,dt = -\int_{2a}^{-2a} f_a(t)\,dt = -\Big(\int_{2a}^{a} \text{arctg}\,(t)\,dt + \int_{a}^{-2a} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\Big) =$$

$$= a\big(2\text{arctg}\,(2a) - \text{arctg}\,(a)\big) + \frac{1}{2}\log\big(\frac{a^2+1}{4a^2+1}\big) + 2\big(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{4a^2+1}\big).$$

(*iv*) Si stabilisca per quali parametri $a \in \mathbb{R}$ la funzione f_a è primitivabile su $\mathbb{R}$. Per questi valori di a si calcoli una primitiva.

La funzione f_a è primitivabile se $a = 0$ perché è continua; se $a \neq 0$ la funzione f_a presenta un salto in a, e quindi non è primitivabile per il teorema sul limite della derivata. Se $a = 0$ una primitiva è

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \text{arctg}\,(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) & \text{se } x \leq 0, \\ 2\sqrt{x^2+1} - 2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$