Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \big(\log t\big)^{99}\, dt.$$

(*i*) Si calcoli la derivata di f e si studi il segno di $f'(x)$.

Si ha

$$f'(x) = \Big(\log x\Big)^{99} \Big(\frac{x^2-1}{x^2}\Big)$$

e quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, $x \neq 1$; $f'(1) = 0$.

(*ii*) Si verifichi che la funzione f è crescente sul dominio. Si trovi l'unico zero x_0 di f e si studino i segni di f.

La derivate di f è sempre non-negativa, quindi la funzione è crescente. Evidentemente l'unico zero di f è $x = 1$; si ha $f(x) < 0$ se $x \in]0, 1[$, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ se $x > 1$.

(*iii*) Si calcolino

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \alpha \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \beta.$$

Si ha $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$

(*iv*) Si provi che $x = 1$ è un punto di flesso per f e si stabilisca se ascendente o discendente.

L'approssimante lineare della funzione f nel punto $x = 1$ è la funzione nulla. Poiché si ha $f(x) < 0$ se $x < 1$ e $f(x) > 0$ se $x > 1$, per definizione di punto di flesso si ha che $x = 1$ è punto di flesso ascendente per f.

Si noti che era del tutto inutile calcolare la derivata seconda in questo caso.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)^2} - 2x$$

(*i*) Si determini il dominio di f.

Per determinare il dominio si pone $x(x+1)^2 \geq 0$. Pertanto il dominio della funzione è l'insieme

$$dom f = \{-1\} \cup [0, +\infty[.$$

Si noti che il punto -1 è isolato nel dominio.

(*ii*) Si calcolino, se possibile, $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

Il primo limite non si può calcolare perché il dominio della funzione non è illimitato inferiormente. Il secondo limite è $+\infty$.

(*iii*) Si determinino i segni della funzione f sul suo dominio.

$$\sqrt{x(x+1)^2} \geq 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(x-1)^2 \geq 0,$$

per cui $f(x) > 0$ se $x > 0$, $x \neq 1$; $f(0) = f(1) = 0$, $f(-1) = 2$.

(*iv*) Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è derivabile, si calcoli la derivata di f in questi punti e si studino i segni della funzione f'.

La funzione non è derivabile in -1 perché -1 è un punto isolato. Inoltre f non è derivabile in 0, dove si ha $f'(0) = +\infty$. Negli altri punti si ha

$$f'(x) = \frac{3x - 4\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}.$$

Per studiare i segni di f' si può porre $\sqrt{x} = t$ e studiare la disequazione $3t^2 - 4t + 1 \geq 0$. Si ottiene $f'(x) > 0$ se $x \in [0, \frac{1}{9}[\cup]1, +\infty[$, $f'(\frac{1}{9}) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x \in]\frac{1}{9}, 1[$.

(*v*) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f.

La funzione è decrescente su $\{-1, 0\}$ e su $[\frac{1}{9}, 1]$; la funzione è crescente su $[0, \frac{1}{9}]$ e su $[1, +\infty[$.
Si ha $\min f = 0$ e $\sup f = +\infty$.

(*vi*) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Se $\alpha < 0$ nessuna soluzione.
Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = \frac{4}{27}$ oppure $\alpha = 2$ due soluzioni.
Se $0 < \alpha < \frac{4}{27}$ tre soluzioni.
Se $\alpha > \frac{4}{27}$, $\alpha \neq 2$, una soluzione.

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. È assegnata una funzione $f \in C^2(\mathbb{R})$ che verifica le seguenti proprietà: $f(0) = f''(0) = 1,\ f'(0) = 0$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

(*i*)

• La funzione f potrebbe essere dispari?

La funzione non può essere dispari perché $f(0) \neq 0$.

• La funzione f potrebbe essere pari?

La funzione potrebbe essere pari ma non lo è necessariamente.

• La funzione f potrebbe essere periodica?

No, le uniche funzioni periodiche che hanno limite a $\pm\infty$ sono le costanti, ma f chiaramente non è costante (ad esempio perché $f''(0) = 1 \neq 0$).

(*ii*) Si scriva il polinomio di Taylor-MacLaurin di f di ordine 2.

Si ha $f(0) = f''(0) = 1,\ f'(0) = 0$, quindi

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

(*iii*) Si studi, se le informazioni sono sufficienti, il carattere del punto 0 come punto critico per f.

Poiché $f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 1 > 0$, il punto $x = 0$ è un punto di minimo stretto per la funzione f.

(*iv*) Si stabilisca, motivando la risposta, se necessariamente f è limitata, e si dica se necessariamente esistono il minimo e/o il massimo di f su $\mathbb{R}$.

Sì, la funzione è limitata perché è continua e ha limite finito ($= -1$) a $-\infty$ e a $+\infty$. Infatti, fissato ad esempio $\varepsilon = 1$, esiste $K > 0$ tale che $|f(x) + 1| < 1$ se $|x| > K$, e quindi $-2 < f(x) < 0$ se $|x| > K$. D'altra parte $f : [-K, K] \to \mathbb{R}$ è continua su un compatto e quindi ha massimo e minimo per il teorema di Weierstrass; perciò f è limitata su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, essendo $f(x) < 0$ se $|x| > K$ e $f(0) = 1$, il massimo di f su $\mathbb{R}$ coincide con il massimo di f su $[-K, K]$, pertanto esiste $\max_{\mathbb{R}} f$. Per quanto riguarda l'esistenza del minimo non abbiamo informazioni sufficienti per poterlo stabilire con certezza; vi sono due possibilità: o il minimo non esiste e $\inf f = -1$, oppure il minimo esiste ed è $\min f \leq -1$.

(*v*) Quante sono al meno e al più le soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$?

$x = 0$ è soluzione per ipotesi. Poiché il punto $x = 0$ è un punto di minimo stretto per la funzione f, esistono $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ con $f(x_1) > 1$ e $f(x_2) > 1$. D'altra parte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$, quindi esistono $y_1 < x_1$ e $y_2 > x_2$ con $f(y_1) < 1$ e $f(y_2) < 1$. Per il teorema di connessione di Bolzano, si conclude che esistono almeno un punto $z_1 \in]y_1, x_1[$ e almeno un punto $z_2 \in]x_2, y_2[$ con $f(z_1) = f(z_2) = 0$. Quindi ci sono almeno tre soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$.

Vi possono naturalmente essere infinite soluzioni.

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+5} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$$

e quindi una primitiva è $F(x) = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$.

(ii) Si calcoli una primitiva della funzione

$$g(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - 2x^2 + 5}$$

Si ha

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2+1}{(x^2)^2 - 2x^2 + 5} \cdot 2x = \frac{1}{2} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$$

dove $\varphi(x) = x^2$. Per il teorema di sostituzione nelle primitive si ottiene immediatamente una primitiva di g: $G(x) = \frac{1}{2}F\big(\varphi(x)\big) = \frac{1}{4}\log(x^4 - 2x^2 + 5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)$.