Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Sia

$$f(x) = \int_{e^{-x^2}}^{e^x} \frac{\log t}{t} dt.$$

Si determinino

• il dominio di f:

Il dominio è $\mathbb{R}$, infatti la funzione integranda è definita su ogni intervallo di numeri reali positivi, ed entrambi gli estremi dell'intervallo di integrazione sono numeri positivi.

• $f'(x) =$

$$\frac{\log e^x}{e^x} e^x - \frac{\log e^{-x^2}}{e^{-x^2}} e^{-x^2}(-2x) = x - 2x^3$$

• $f''(x) =$

$$1 - 6x^2$$

• $f'''(x) =$

$$-12x$$

• $f^{(4)}(x) =$

$$-12$$

• per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, il polinomio $p_{n,0}$ di Taylor-Maclaurin di f:

$$p_{n,0}(x) = \frac{1}{2}\bigl(x^2 - x^4\bigr)$$

per ogni $n \geq 4$; $p_{2,0}(x) = p_{3,0}(x) = \frac{1}{2}x^2$; $p_{1,0}(x) = 0$.

• $\mathrm{ord}_0 f =$

2 per il lemma di Peano.

OSSERVAZIONE: è evidente che la funzione f, avendo come derivata un polinomio, è un polinomio, e si ha infatti $f(x) = \frac{1}{2}\bigl(x^2 - x^4\bigr)$.

Si noti che l'integrale si poteva facilmente calcolare effettuando la sostituzione $y = \log t$, da cui si otteneva immediatamente $f(x) = \frac{1}{2}\bigl(x^2 - x^4\bigr)$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione reale definita da $f(x) = e^x \log(1 + e^{-x})$.

(i) Si determinino il dominio, gli zeri e i segni di f.

Poiché l'argomento del logaritmo è sempre > 1, il dominio è $\mathbb{R}$, la funzione non ha zeri ed è sempre positiva.

(ii) Si calcolino i limiti di $f(x)$ per x che tende a $-\infty$ e $+\infty$.

Ad esempio, scrivendo $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ e usando il teorema di de l'Hospital, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1.$$

(iii) Si calcoli $f'(x)$ e si determini la funzione g tale che $f'(x) = e^x \cdot g(x)$.

$$f'(x) = e^x \log(1 + e^{-x}) + e^x \frac{1}{1+e^{-x}} \big(- e^{-x} \big) = e^x g(x)$$

con $g(x) = \log(1 + e^{-x}) - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

(iv) Si calcolino i limiti di $g(x)$ per x che tende a $-\infty$, $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

(v) Si calcoli $g'(x)$ e si verifichi che g è una funzione decrescente e positiva sul suo dominio.

$$g'(x) = -\frac{e^{-2x}}{(1+e^{-x})^2} < 0$$

su tutto $\mathbb{R}$. Quindi g è decrescente. Inoltre è positiva essendo decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$.

(vi) Si determinino gli intervalli di monotonia di f, $\inf f$ e $\sup f$.

Da quanto provato in (v) si deduce che $f'(x) > 0$ su $\mathbb{R}$, pertanto la funzione f è sempre crescente e quindi $\inf f = 0$ e $\sup f = 1$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione descritta dall'espressione analitica

$$f(x) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x)\Big).$$

(*i*) Si determini il dominio di f.

Perché sia definita la funzione arcsen (x) deve essere $|x| \leq 1$. Si osservi che si ha sempre $|\operatorname{arcsen}(x)| \leq \frac{\pi}{2}$. L'argomento della funzione tangente deve essere diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$, per qualsiasi $k \in \mathbb{Z}$, quindi dobbiamo imporre $x \neq 0$. Il dominio della funzione f è pertanto $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

(*ii*) Si stabilisca se f è una funzione periodica, se è pari, se è dispari, se è continua.

La funzione non può essere periodica essendo definita su un insieme limitato. Poiché le funzioni arcoseno e tangente sono dispari e la funzione tangente è periodica di periodo π si ha

$$f(-x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x)) = \operatorname{tg}(\frac{-\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x)) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x)) = -f(x)$$

pertanto la funzione è dispari.
La funzione è chiaramente continua sul suo dominio (che NON è un intervallo!).
(*iii*) Si calcoli $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x)\right)}$$

(*iv*) Si stabilisca se f è monotona sul suo dominio.

La derivata di f è sempre negativa, quindi si può dedurre che in ogni intervallo di definizione la funzione è sempre decrescente. Tuttavia la funzione NON è monotona sul dominio; infatti si vede facilmente che $f(x) < 0$ se $x < 0$ e $f(x) > 0$ se $x > 0$.

(*v*) Si determini l'insieme immagine di f.

Poiché la funzione f è decrescente su $]0, 1]$ e si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = 0$, si ha $f(]0, 1]) = [0, +\infty[$. Per la simmetria di f si conclude che l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$.

(*vi*) Si scriva l'espressione analitica dell'inversa della funzione $f|_{]-1,0[}$ restrizione di f all'intervallo $]-1, 0[$.

Qui si deve stare attenti alle definizioni di arcoseno (inversa della funzione seno ristretta all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) e arcotangente (inversa della funzione tangente ristretta all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Poniamo $y = f(x)$. Se $x \in]-1, 0[$ si avrà $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si ha pertanto

$$y = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x)\Big) = \operatorname{tg}\Big(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x)\Big) = -\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x)\Big),$$

da cui

$$\operatorname{arctg}(-y) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x) \quad \text{e} \quad x = \operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(y)\Big).$$

ESERCIZIO N. 4. Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : [0, +\infty[$ definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \in [0,1[; \\ 2t + 1 - t^2 & \text{se } t \in [1,2[; \\ a & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

Si ponga inoltre $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(i) Si stabilisca, motivando la risposta, per quali parametri a la funzione g è continua (g, non f !!!)

Per ogni parametro $a \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua a tratti e quindi è localmente integrabile. Per il teorema di continuità della funzione integrale deduciamo che g è continua per ogni a.

(ii) Si stabilisca, motivando la risposta, per quali parametri a la funzione g è derivabile.

La funzione f è continua se $a = 1$ e presenta una discontinuità di tipo salto in $t = 2$ per $a \neq 1$. Perciò g è derivabile se $a = 1$ per il teorema fondamentale del calcolo, mentre non è derivabile se $a \neq 1$, poiché, se lo fosse, la sua derivata presenterebbe una discontinuità di tipo salto e questo non è possibile per una derivata.

(iii) Posto $a = 0$ si calcoli $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Evidentemente, essendo $f(t) = 0$ per ogni $t \geq 2$, si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$. Calcoliamo

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt + \int_1^2 \left(2t + 1 - t^2\right) dt = \frac{8}{3}.$$

(iv) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^2 g(x)\ dx =$$

Si ha $g(x) = x^2$ se $x \in [0,1]$, mentre $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{2}{3}$ se $x \in [1,2]$. Quindi

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \Big(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \frac{2}{3}\Big)\,dx = \frac{5}{6}.$$