Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, I appello

COGNOME e NOME ______________________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione $f(x) = 2^x$.

(i) Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si calcoli la derivata di ordine n di f.

$$f^{(n)}(x) = 2^x (\log 2)^n$$

(ii) Si scriva l'equazione della retta tangente il grafico di f nel generico punto del grafico $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

$$y = 2^{x_0} \log 2 \cdot x + 2^{x_0}(1 - \log 2 \cdot x_0)$$

(iii) Si determini x_0 in modo tale che la retta tangente il grafico di f nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$ passi per l'origine.

$$x_0 = \frac{1}{\log 2} = \log_2(e)$$

(iv) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $2^x = kx$.

Osserviamo che per $k = e \cdot \log(2)$ la retta $y = kx$ è tangente il grafico della funzione.

Si tiene inoltre conto del fatto che l'esponenziale è crescente, convessa, tende a 0 se x tende a $-\infty$, è positiva e infinita di ordine soprareale a $+\infty$. Pertanto si deduce che per $k < 0$ si ha una soluzione, ottenuta per valori negativi di x; per $0 \le k < e \cdot \log(2)$ non si hanno soluzioni; per $k = e \cdot \log(2)$ una soluzione; per $k > e \cdot \log(2)$ 2 soluzioni.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x-2)(3x+4)^2}.$$

(*i*) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Si scriva ad esempio f come $f(x) = \frac{x}{3}\sqrt[3]{(3-\frac{2}{x})(3+\frac{4}{x})^2}$.

(*ii*) Si stabilisca l'eventuale esistenza di asintoti a $-\infty$ e a $+\infty$ per f.

$$y = x + \frac{2}{3}$$

asintoto a $-\infty$ e a $+\infty$.

Infatti, si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(3-\dfrac{2}{x})(3+\dfrac{4}{x})^2} = 1$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+\left((1-\frac{2}{3}y)(1+\frac{4}{3}y)^2-1\right)}-1}{\left((1-\frac{2}{3}y)(1+\frac{4}{3}y)^2-1\right)} \frac{\left((1-\frac{2}{3}y)(1+\frac{4}{3}y)^2-1\right)}{y} = \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3}.$$

(*iii*) Si determinino gli zeri e i segni di f.
$f(x) < 0$ se $x \in]-\infty. -\frac{4}{3}[\cup]-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}[$; $f(x) > 0$ se $x \in]\frac{2}{3}, +\infty[$; $f(x) = 0$ se $x = -\frac{4}{3}$ o $x = \frac{2}{3}$.

(*iv*) Si calcoli f' nei punti dove esiste ed eventualmente le derivate destra e sinistra nei punti dove la derivata non esiste.

$$f'(x) = \frac{3x(3x+4)}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)(3x+4)^2}\right)^2} = \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x-2)^2(3x+4)}}$$

$f'(\frac{2}{3}) = +\infty$; $f'_-(-\frac{4}{3}) = +\infty$, $f'_+(-\frac{4}{3}) = -\infty$.

(*v*) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.

$x = 0$ è l'unico punto critico. $f'(x) > 0$ se $x \in]-\infty. -\frac{4}{3}[\cup]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$ se $x \in]-\frac{4}{3}, 0[$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

(vi) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi di f.

f crescente su $]-\infty, -\frac{4}{3}]$ e su $[0, +\infty[$; f decrescente su $[-\frac{4}{3}, 0]$. $-\frac{4}{3}$ è punto di massimo relativo con valore 0, $x = 0$ è punto di minimo relativo con valore $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$.

(vii) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Una soluzione se $\alpha < -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ oppure $\alpha > 0$. Due soluzioni se $\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$ oppure $\alpha = 0$. Tre soluzioni se $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{4} < \alpha < 0$.

ESERCIZIO N. 3.

Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro; si consideri la funzione $f :]-2. +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} a + \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t}{t^2+t-2}\, dt & \text{se } x \in]-2, 0]; \\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_{x}^{0} \frac{t}{t^4+1}\, dt & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t}{t^2+t-2}\, dt$.

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{x} \left(\frac{2}{t+2} + \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{2}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\log(2)$$

(ii) Si determini il parametro a in modo tale che f sia continua su $]-2,+\infty[$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = a + \dfrac{1}{3}\log(2)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Perciò si deve imporre $a = -\frac{1}{3}\log(2)$.

(iii) Fissato a come in (ii) si verifichi che $f \in C^2(]-2,+\infty[)$.

Si ha $f'(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$ se $x < 0$ e $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^4+1}$ se $x > 0$. Si ottiene perciò $f'(0) = 0$ e $f \in C^1(]-2,+\infty[)$.
Si ha $f''(x) = -\frac{x^2+2}{(x^2+x-2)^2}$ se $x < 0$ e $f''(x) = \frac{1}{2}\frac{3x^4-1}{(x^4+1)^2}$ se $x > 0$. Si ottiene perciò $f''(0) = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f''(x)$ e $f \in C^2(]-2,+\infty[)$.

(iv) Fissato a come in (ii) si scriva il polinomio di Taylor (Maclaurin) relativo al punto $x_0 = 0$ di ordine 2 della funzione f.

$$P_2(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

(v) Fissato a come in (ii) si calcoli $\max f$.

Si osservi che per $x > 0$ la funzione è sempre negativa (l'argomento dell'integrale è positivo).
Inoltre, nell'intervallo $]-2,0]$ la funzione è crescente perché ha derivata positiva $\frac{x}{x^2+x-2} > 0$, e si ha $f(0) = 0$. Pertanto $\max f = 0$.

(vi) Si stabilisca, giustificando la risposta, se esiste e se è finito o infinito il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Esiste finito per il teorema dell'aut aut e per il criterio dell'ordine di infinitesimo; infatti l'argomento dell'integrale è positivo ed è un infinitesimo di ordine 3.

In alternativa si può anche calcolare l'integrale esplicitamente utilizzando la sostituzione $z = t^2$. Si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{4}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+z^2}\,dz = -\frac{\pi}{8}.$$