Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

Verifica delle competenze preliminari.

(i) Si scriva la definizione esplicita di $\lim_{x\to -\pi^2} f(x) = \sqrt{\pi}$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in dom f$, se $|x+\pi^2| < \delta$, allora $|f(x) - \sqrt{\pi}| < \varepsilon$.

(ii) Si calcoli il limite $\lim_{x\to +\infty} x^2\sqrt{x^4-1} - x^4$

$$x^2\left(\sqrt{x^4-1} - x^2\right)\frac{\left(\sqrt{x^4-1}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^4-1}+x^2\right)} = \frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}+1\right)} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

(iii) Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} e^{t^2}\,dt + \operatorname{arctg}(2x+1)$.

$$-e^{\cos^2(x)}\operatorname{sen}(x) - e^{\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x) + \frac{2}{1+(2x+1)^2}$$

(iv) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{(2x-1)(x+1)}{x^3+1}\,dx$

$$\log(3)$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \log\left(2e^{2x} - e^x + 1\right)$$

(i) Si determini il dominio della funzione e si calcolino i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Il dominio è $\mathbb{R}$, essendo $2e^{2x} - e^x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. I limiti sono $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(ii) Si calcoli $f'(x)$; si determinino gli zeri e il segno di $f'(x)$. Si determinino gli intervalli di monotonia di f, gli eventuali punti di estremo locale e i valori $\inf f$ e $\sup f$.

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - e^x}{2e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x}{2e^{2x} - e^x + 1}\left(4e^x - 1\right)$$

Si ha $f'(x) = 0$ per $x = -2\log(2)$; $f'(x) < 0$ su $]-\infty, -2\log(2)[$ e $f'(x) > 0$ su $]-2\log(2), +\infty[$. Pertanto la funzione è strettamente decrescente su $]-\infty, -2\log(2)]$ e strettamente crescente su $[-2\log(2), +\infty[$. Il punto $x = -2\log(2)$ è punto di minimo locale e assoluto con valore $\min f = f(-2\log(2)) = \log(\frac{7}{8}) < 0$. Chiaramente $\sup f = +\infty$.

(iii) Si studino i segni della funzione f.

Si ha $f(x) < 0$ su $]-\infty, -\log(2)[$ e $f(x) > 0$ su $[-\log(2), +\infty[$. L'unico zero della funzione f è il punto $-\log(2)$.

(iv) Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$.

Nessuna soluzione se $\alpha < \log(\frac{7}{8})$.
Una soluzione se $\alpha = \log(\frac{7}{8})$.
Due soluzioni se $\log(\frac{7}{8}) < \alpha < 0$.
Una soluzione se $\alpha \geq 0$.

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^3-1} & \text{se } x < 0; \\ \frac{x^2}{x^3+1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si determini la primitiva F della funzione f che verifica $F(1) = 0.$.

$$F(x) = \frac{1}{3} \log\left(|x^3| + 1\right) - \frac{1}{3} \log 2$$

(ii) Si determini una primitiva G della funzione $g(x) = |f(x)|$.

$$G(x) = \frac{1}{3} \begin{cases} -\log\left(|x^3| + 1\right) & \text{se } x < 0; \\ \log\left(|x^3| + 1\right) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(iii) Si determini una primitiva H della funzione $h(x) = f\left(|x|\right)$.

$$H(x) = \frac{1}{3} \begin{cases} -\log\left(|x^3| + 1\right) & \text{se } x < 0; \\ \log\left(|x^3| + 1\right) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione reale f definita da

$$f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt$$

(i) Si calcoli $f'(x)$ e si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di minimo e massimo di f.

$f'(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$.
Si ha $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e $f'(x) > 0$ se $x > 0$, $f'(0) = 0$. Pertanto 0 è punto di minimo assoluto per f, la funzione è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$. Si noti, in particolare, che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si stabilisca se esistono finiti o infiniti i limiti di f a $-\infty$ e a $+\infty$.

La funzione $\sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ è infinita a $-\infty$, quindi l'integrale diverge per $x \to -\infty$ (ovviamente a $+\infty$).
La funzione $\sqrt[3]{x}\, e^{-x}$ è infinitesima di ordine soprareale a $+\infty$, quindi l'integrale converge a un numero reale $\ell > 0$ per $x \to +\infty$. Possiamo anche osservare che, se $x > 1$ si ha $\sqrt[3]{x}\, e^{-x} < x\, e^{-x}$ e quindi

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt + \int_1^x \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt < 1 + \int_1^x t\, e^{-t}\, dt = 1 + \frac{2}{e} - e^{-x}(1 + x).$$

Pertanto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell < 1 + \frac{2}{e}$.

(iii) Si calcoli $f''(x)$ e si determinino gli intervalli di convessità di f e gli eventuali punti di flesso.

Per $x \neq 0$ si ha

$$f''(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\, e^{-x} - \sqrt[3]{x}\, e^{-x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, e^{-x} \left(\frac{1}{3} - x\right)$$

Inoltre $f''(0) = +\infty$. La funzione f pertanto è convessa su $]-\infty, \frac{1}{3}]$ e concava su $[\frac{1}{3}, +\infty[$. Il punto $\frac{1}{3}$ è un punto di flesso discendente.

(iv) Si disegni un grafico indicativo di f. Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, nei casi $\alpha = -e$, $\alpha = e^{-1}$, $\alpha = e$.

Si ha $f(x) \geq 0$, quindi non ci sono soluzioni per $\alpha = -e$.
Per studiare gli altri casi dobbiamo stimare il valore del limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Sappiamo già che

$$\ell < 1 + \frac{2}{e} < 2;$$

inoltre si ha, se $x > 1$, $\sqrt[3]{x}\, e^{-x} > e^{-x}$ e quindi

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt + \int_1^x \sqrt[3]{t}\, e^{-t}\, dt > \int_1^x e^{-t}\, dt = \frac{1}{e} - e^{-x}.$$

Pertanto $e^{-1} < \ell < e$ e si conclude che l'equazione ha due soluzioni per $\alpha = e^{-1}$ e una sola soluzione per $\alpha = e$.