Esame di Analisi matematica I
Prova di esercizi
Corso del Professor Franco Obersnel
Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________	

ESERCIZIO N. 1.

(*i*) Si scriva il polinomio di Taylor-MacLaurin di ordine 3 della funzione $g(z) = \text{arctg}\,(z)$.

$$g'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad g''(z) = -\frac{2z}{(1+z^2)^2} \qquad g'''(z) = -2\,\frac{(1+z^2)^2 - 4z^2(1+z^2)}{(1+z^2)^4}$$

$$g(0) = 0 \qquad g'(0) = 1 \qquad g''(0) = 0 \qquad g'''(0) = -2$$

$$P_3(z) = z - \frac{1}{3} z^3$$

(*ii*) Si scriva il polinomio di Taylor-MacLaurin di ordine 6 della funzione $f(x) = \text{arctg}\,(x^3 - x^2)$.

$$f(x) = (x^3 - x^2) - \frac{1}{3}(x^3 - x^2)^3 + o(x^7)$$

$$P_6(x) = -x^2 + x^3 + \frac{1}{3} x^6$$

(*iii*) Si usi il risultato precedente per calcolare $f^{vi}(0)$.

$$\frac{1}{3} = \frac{f^{vi}(0)}{6!} \implies f^{vi}(0) = 240$$

(*iv*) Si calcoli $ord_0(f(x) + x^2) =$

$$= ord_0\left(x^3 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^7)\right) = 3$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - x) & \text{se } x \leq 0; \\ 2 - x - 2\cos x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(*i*) Si determinino eventuali asintoti di f a $-\infty$ e/o a $+\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ asintoto a $-\infty$ $y = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x)$ non esiste

non c'è asintoto a $+\infty$

(*ii*) Si calcolino $f'(x)$ e $f''(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{1+(x^2-x)^2} & x < 0 \\ -1 + 2\operatorname{sen} x & x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(1+(x^2-x)^2) - (2x-1)\cdot 2(x^2-x)(2x-1)}{[1+(x^2-x)^2]^2} & x < 0 \\ 2\cos x & x > 0 \end{cases} \qquad f''(0) = 2$$

(*iii*) Si stabilisca se $f \in C^n(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, 2$.

$f \in C^2(\mathbb{R})$ perché $f''(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$

esiste anche se $x = 0$ perché $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} f''(x) = 2$

(*iv*) Si scriva l'equazione della retta tangente il grafico di f nel punto $(0, 0)$.

$f(0) = 0$ $f'(0) = -1$ $y = -x$

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola ____________

(*v*) Si determinino i punti critici di f:

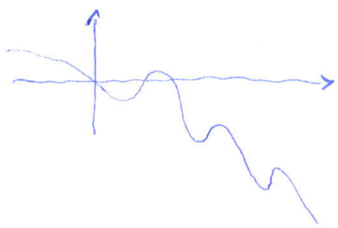
$f'(x)<0$ se $x<0$; $f'(x)=0$ se $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ e $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$

$f'(x)>0$ se $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi\right[$

(*vi*) Si determinino i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo di f:

$\frac{5}{6}\pi+2k\pi$ $k\in\mathbb{N}$ punti di massimo relativo

$\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $k\in\mathbb{N}$ punti di minimo relativo



(*vii*) Si verifichi che l'equazione $f(x)=0$ ammette esattamente tre soluzioni in $\mathbb{R}$.

$f(0)=0$, $f(x)>0$ $\forall x<0$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}<0$ $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2-\frac{5}{6}\pi+\sqrt{3}>0$

$f\left(\frac{13}{6}\pi\right)<0$ e $f(x)<0$ $\forall x\geq\frac{13}{6}\pi$; per il teorema di Bolzano esistono due zeri $x_1\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[$ e $x_2\in\left]\frac{5}{6}\pi,\frac{13}{6}\pi\right[$ e non possono esserci altri zeri per la monotonia di f negli intervalli indicati.

(*viii*) Si determinino eventuali valori $\alpha\in[0,+\infty[$ tali che l'equazione $f(x)=\alpha$ ammette esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$.

Poiché $12+6\sqrt{3}<8\pi$ si ha $0<f\left(\frac{5}{6}\pi\right)<\frac{\pi}{2}$ e quindi $f(x)=\alpha$ ha esattamente due soluzioni solo se $\alpha=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ [ha una soluzione se $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)<\alpha<\frac{\pi}{2}$, ha tre soluzioni se $0\leq\alpha<f\left(\frac{5}{6}\pi\right)$]

ESERCIZIO N. 3.

(i) Si calcoli, sull'intervallo $[0, +\infty[$, una primitiva della funzione $g(z) = \operatorname{sen}(\sqrt{z})$.

$$\int_0^z \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt = \int_0^{\sqrt{z}} \operatorname{sen}(y)\cdot 2y\,dy = \Big[-\cos y \cdot 2y\Big]_0^{\sqrt{z}} + \int_0^{\sqrt{z}} \cos y \cdot 2\,dy =$$

$$\sqrt{t} = y \quad dt = 2y\,dy$$

$$= -2\sqrt{z}\cos\sqrt{z} + 2\operatorname{sen}\sqrt{z}$$

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi} \Big(\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt \Big)\,dx.$$

$$\int_0^{\pi} \big(-2x\cos x + 2\operatorname{sen} x\big)\,dx =$$

$$= \Big[-2x\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2\operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} 2\operatorname{sen} x\,dx = 8$$