**Esame di Analisi matematica I**

**Prova di esercizi**

**Corso del Professor Franco Obersnel**

**Sessione autunnale, appello unico**

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** __________

**Anno di Corso** ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________________

**ESERCIZIO N. 1.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\text{arctg }(x) - \text{arctg }(x^2)}{x}.$$

$(i)$ Si calcoli $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\text{arctg }(x)}{x} - \frac{\text{arctg }(x^2)}{x^2}x = 1$$

$(ii)$ Si verifichi che la funzione $f$ è infinitesima a $-\infty$ e a $+\infty$. Si calcolino gli ordini di infinitesimo:

$ord_{-\infty}(f) = 1$

Infatti

$$\lim_{x\to -\infty} xf(x) = \lim_{x\to -\infty} \Big(\text{arctg }(x) - \text{arctg }(x^2)\Big) = -\pi.$$

$ord_{+\infty}(f) = 2$

Infatti

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 f(x) \Leftarrow^{De\,L'} \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{\left|2 - \log_2(x)\right|} - 1.$$

($i$) Si determini il dominio di $f$ e si calcolino, se possibile, i limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Il dominio è $]0, +\infty[$. Non si può calcolare il limite a $-\infty$. Si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

($ii$) Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione $f$ è derivabile, si calcoli la derivata di $f$ in questi punti e si studino i segni della funzione $f'$.

Se $x \in ]0, 4[$ si ha $f(x) = \sqrt{2 - \log_2(x)} - 1$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{2x \log 2 \sqrt{2 - \log_2(x)}}.$$

Se $x > 4$ si ha $f(x) = \sqrt{\log_2(x) - 2} - 1$ e

$$f'(x) = \frac{1}{2x \log 2 \sqrt{\log_2(x) - 2}}.$$

In particolare $f$ non è derivabile in 4, dove si ha $f'_-(4) = -\infty$, $f'_+(4) = +\infty$.

($iii$) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di $f$.

La derivata è negativa su $]0, 4[$ e positiva su $]4, +\infty[$. Pertanto la funzione è strettamente decrescente su $]0, 4]$ e strettamente crescente su $[4, +\infty[$. La funzione ha minimo assoluto in $x = 4$ (minimo $-1$) e $\sup f = +\infty$.

($iv$) Si determinino i segni della funzione $f$ sul suo dominio.

La funzione avrà due zeri, che si possono calcolare risolvendo l'equazione $f(x) = 0$. Per $x \in ]0, 4[$ si risolve $2 - \log_2 x = 1$ e quindi $x = 2$. Per $x > 4$ si risolve $\log_2 x - 2 = 1$ e quindi $x = 8$. Pertanto la funzione $f$ è positiva se $x \in ]0, 2[ \cup ]8, +\infty[$ ed è negativa se $x \in ]2, 8[$.

($v$) Si stabilisca, giustificando la risposta, se è finito l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

La funzione è infinita di ordine sottoreale in 0. Pertanto l'integrale è finito.

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Sia $n \in \mathbb{N}^+$ un numero naturale positivo ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e si consideri la funzione

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{2}{(1-t)(t-2)^n}\,dt.$$

($i$) Si determini il dominio della funzione $f_n$.

La funzione integranda è infinita di ordine 1 quando $t = 1$, pertanto la funzione integrale è definita su $]-\infty, 1[$.

($ii$) Si calcoli $f_n'(x)$ e si studi il segno di $f_n'(x)$ sul suo dominio.

$f_n'(x) = \frac{2}{(1-x)(x-2)^n}$ e quindi $f_n'(x) > 0$ sul suo dominio se $n$ è pari, $f_n'(x) < 0$ sul suo dominio se $n$ è dispari.

($iii$) Si stabilisca (senza calcolarlo!) se esiste finito il limite $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$.

Esiste finito, infatti la funzione integranda è infinitesima di ordine $n + 1 \geq 2$ a $-\infty$.

($iv$) Nel caso $n = 2$ si calcoli il valore della funzione nel punto $-1$: $f_2(-1) =$

$$\int_0^{-1} \frac{2}{(1-t)(t-2)^2}\,dt = \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2}\right) dt = \frac{1}{3} - 2\log(4/3)$$