Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** ________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} \in \{4\} \cup [1, 2[\right\}.$$

(*i*) Si determinino

• $\inf E$ (specificando se esiste $\min E$)

$\min E = -16$

• $\sup E$ (specificando se esiste $\max E$)

$\max E = 16$

• l'insieme dei punti di accumulazione di E:

$[-4, -1] \cup [1, 4]$

• l'insieme dei punti isolati di E:

$\{-16, 16\}$

(*ii*) Si consideri la successione $(x_n)_n$ definita da

$$x_n = \frac{2^{4+2n} + 2^n}{4^n}$$

• Si calcoli il limite $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Si ha $\lim_{n\to+\infty} = 16$, infatti

$$x_n = 16 + \frac{1}{2^n}$$

• Sia F l'insieme dei valori assunti dalla successione: $F = \left\{ x_n : n \in \mathbb{N} \right\}$. Si stabilisca se gli insiemi E e F sono contigui.

La successione $(x_n)_n$ è decrescente, quindi $\inf F = 16$. Inoltre $\sup E = 16$. Pertanto gli insiemi sono contigui.

ESERCIZIO N. 2.

(i) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + 6|x| - 4$

• Si calcolino i limiti della funzione per $x \to \pm\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• Si calcolino dove possibile la derivata e la derivata seconda di f e si studino i segni di f' e f''.

$f'(x) = 3x^2 - 6$ se $x < 0$, $f'(x) = 3x^2 + 6$ se $x > 0$. La funzione non è derivabile in $x = 0$ dove $f'_-(0) = -6$, $f'_+(0) = 6$. $f''(x) = 6x$ per ogni $x \neq 0$.

• Si determinino gli eventuali punti di estremo relativo di f e si calcolino in questi punti i valori di f.

Il punto $-\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo per f e si ha $f(-\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2} - 1) > 0$. Il punto 0 è un punto di minimo relativo per f con $f(0) = -4$.

• Si determinino gli zeri della funzione f. Se non si è in grado di calcolare il valore esatto di questi zeri si calcoli un valore approssimato con un errore di stima inferiore a $0,25$.

Se $x < 0$ si ha $f(x) = \big(x+2\big)\big(x-(1-\sqrt{3})\big)\big(x-(1+\sqrt{3})\big)$. Pertanto, si hanno due zeri negativi per $x = -2$ e $x = 1 - \sqrt{3}$.

Sull'intervallo $[0, +\infty[$ si osservi che la funzione è crescente, quindi si ha al più uno zero. Inoltre si ha $f(0) = -4 < 0$, $f(1) = 3 > 0$; per il teorema degli zeri di Bolzano, poiché la funzione è continua, esiste uno zero di f nell'intervallo $]0, 1[$. Possiamo ottenere una stima migliore dello zero osservando che $f(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{8} < 0$ e $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}(\frac{27}{16} + 2) > 0$, quindi un valore con la stima richiesta è un qualunque punto dell'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$.

(ii) Si stabilisca il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$

Disegnando il grafico e osservando che $1 < 4(\sqrt{2} - 1)$ (questo fatto si verifica ad esempio osservando che $4\sqrt{2} > 5$) si osserva che l'equazione ha esattamente tre soluzioni (due negative e una positiva).

(iii) Si stabilisca il numero delle soluzioni dell'equazione $|f(x)| = 1$.

Il grafico della funzione $|f|$ si ottiene riflettendo rispetto all'asse delle x il grafico della f nelle zone dove questa è negativa. Dal grafico si deduce che le soluzioni sono sei (quattro negative e due positive).

(iv) Si stabilisca il numero delle soluzioni dell'equazione $f(|x|) = 1$.

Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene sostituendo la parte con $x < 0$ del grafico della f con una copia simmetrica della parte con $x > 0$. Le soluzioni saranno quindi due (una negativa e una positiva).

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione razionale

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2\,(x^2+1)}$$

(i) Si stabilisca, giustificando le risposte, se la funzione f è integrabile in senso generalizzato

• sull'intervallo $]-1, 1[$:

La funzione non è integrabile perché è infinita di ordine 2 in -1.

• sull'intervallo $[1, +\infty[$:

La funzione è integrabile perché è infinitesima di ordine 2 a $+\infty$.

(ii) Si usi il metodo di Hermite per decomporre la funzione f in frazioni semplici.

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x+1}$$

(iii) Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

• Si calcoli $F(1)$.

$$F(1) = \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2+1} - \frac{d}{dx}\frac{1}{x+1}\right) dx = \left[2\,\mathrm{arctg}\,(x) - \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$$

• Si calcoli $\int_0^1 F(x)\,dx$.

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 \left(2\,\mathrm{arctg}\,(x) - \frac{1}{x+1} + 1\right) dx =$$

$$\left[2x\,\mathrm{arctg}\,(x) - \log\left((1+x^2)(x+1)\right)\right]_0^1 + 1 = \frac{\pi}{2} - \log(4) + 1$$

ESERCIZIO N. 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa, derivabile nei punti $x = 1$ e $x = 2$, che soddisfa

$$f(1) \cdot f(2) = f'(1) \cdot f'(2) = -1$$

(*i*) Si stabilisca, motivando la risposta, se f può/deve essere limitata inferiormente e/o superiormente e se esistono necessariamente $\min f$ e/o $\max f$.

Poiché la funzione è convessa, la derivata destra e la derivata sinistra sono funzioni crescenti. Pertanto si ha $f'(1) < 0 < f'(2)$. Questo significa che la funzione sarà decrescente prima di 1 e crescente dopo 2. Tra 1 e 2 ci deve pertanto essere un punto di minimo, che sarà punto di minimo assoluto per la funzione. Si noti che $\min f < 0$ perché per ipotesi uno dei due valori della funzione $f(1)$ o $f(2)$ è negativo. Quindi f è limitata inferiormente ed esiste $\min f$. Invece, la derivata a destra di 2 è positiva, quindi la funzione deve essere crescente e tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. In modo simile si vede che anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Pertanto $\sup f = +\infty$.

(*ii*) Si stabilisca, motivando la risposta, se f ha necessariamente degli zeri e quanti sono al minimo e al massimo. Può f avere uno zero $x_1 < 0$?

La funzione f è continua perché convessa e assume valori di segno opposto in 1 e 2. Per il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano, esiste uno zero $x_0 \in]1, 2[$ della funzione. Poiché f è continua, il minimo di f è negativo e la funzione tende a $+\infty$ sia a $-\infty$ che a $+\infty$, per il teorema di connessione ci deve essere un secondo zero. Poiché f è convessa non ci possono essere più di due zeri e quindi ci sono esattamente due zeri, uno interno all'intervallo $]1, 2[$, l'altro esterno. Certamente il secondo zero potrebbe essere negativo.

(*iii*) Si stabilisca, motivando la risposta, se è necessariamente vero che esiste un punto $\xi \in]1, 2[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Si noti che non posso utilizzare nuovamente il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano, se non so che f è di classe C^1. Se la funzione f è derivabile l'affermazione è comunque vera, perché f ha un punto di minimo nell'intervallo $]1, 2[$, e quindi per il teorema di Fermat c'è un punto critico. Tuttavia, la funzione f potrebbe non essere derivabile nell'intervallo, quindi potrebbe non esistere un punto di annullamento della derivata.

(*iv*) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x+2) - 2\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{x})$ è monotona su $]1, +\infty[$.

La funzione $f(x)$ è certamente crescente su $[2, +\infty[$, quindi $f(x + 2)$ è crescente su $[0, +\infty[$. La funzione $\mathrm{sen}\,(1/x)$ è decrescente su $[1, +\infty[$, quindi la funzione g è crescente su $]1, +\infty[$ perché somma di due funzioni crescenti.