Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________	**N. Matricola** __________
Anno di Corso ______	**Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1.

Si considerino le funzioni

$$f(x) = \frac{\sin(1-\cos x)}{\pi - \pi\cos(\sin x)}; \qquad g(x) = \frac{1+\cos(\pi - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}(\pi\cos x)}.$$

(i) Si calcoli il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos(x)}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(\sin x)} = \frac{1}{\pi}.$$

(ii) Si calcoli il limite $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$$\lim_{x\to 0} g(x) \Leftarrow^{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi - \operatorname{sen} x)\cos x}{\pi\cos(\pi\cos x)(-\operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\pi\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\pi}.$$

(iii) Si stabilisca, motivando la risposta, se esistono un intorno $U =]-\varepsilon, \varepsilon[$ di 0 e un numero $a \in \mathbb{R}$ tali che sia continua la funzione $f_a : U \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } -\varepsilon < x < 0; \\ a \text{ se } x = 0; \\ g(x) \text{ se } 0 < x < \varepsilon. \end{cases}$$

Sì, con $a = \frac{1}{\pi}$ la funzione è continua perché i limiti in $x = 0$ da destra e da sinistra sono uguali al valore della funzione.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 3\sqrt{-x} - 2 & \text{se } x < 0; \\ x - 3\sqrt{x} - 4 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Si determinino gli zeri e i segni di f.

Per $x < 0$ poniamo $t = \sqrt{-x}$ e risolviamo l'equazione $-t^2 + 3t - 2 = 0$, ottenendo $t = 1$ e $t = 2$, da cui $x = -4$ e $x = -1$. Per $x > 0$ poniamo $t = \sqrt{x}$ e risolviamo l'equazione $t^2 - 3t - 4 = 0$, ottenendo $t = -1$ (da escludere) e $t = 4$, da cui $x = 16$. Pertanto gli zeri di f sono $-4, -1, 16$. La funzione è positiva se $x \in]-4, -1[\cup]16, +\infty[$ ed è negativa se $x \in]-\infty, -4[\cup]-1, 16[$.

(ii) Si calcoli la derivata f'.

Si ha $f'(x) = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{|x|}}$.

(iii) Si stabilisca se è possibile estendere f in $x = 0$ in modo tale che esista $f'(0)$.

Sì, poiché si ha $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -4$, si avrà $f'(0) = -\infty$ se $-4 \leq f(0) \leq -2$.

(iv) Si determinino gli intervalli di monotonia e gli estremi relativi e assoluti di f.

La funzione è crescente sugli intervalli $]-\infty, -\frac{9}{4}]$ e $[\frac{9}{4}, +\infty[$. La funzione è decrescente sull'insieme $[-\frac{9}{4}, \frac{9}{4}] \setminus \{0\}$. Il punto $-\frac{9}{4}$ è di massimo relativo, il punto $\frac{9}{4}$ è di minimo relativo. $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$.

(v) Si stabilisca, motivando la risposta, se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f_a(x) = f(x) + a$ sia simmetrica (pari o dispari).

Si osservi che la derivata $f'(x)$ è una funzione pari. Chiaramente la funzione f_a non potrà essere pari. Per essere dispari, deve essere $f_a(-x) = -f_a(x)$. Sia $x > 0$. Allora $f_a(-x) = -x + 3\sqrt{x} - 2 + a$, mentre $-f_a(x) = -(x - 3\sqrt{x} - 4 + a) = -x + 3\sqrt{x} + 4 - a$. Imponendo l'uguaglianza si ottiene $a = 3$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 3\sqrt{-x} - 2 & \text{se } x < 0; \\ x - 3\sqrt{x} - 4 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si stabilisca, motivando la risposta, se la funzione f è integrabile e/o primitivabile su $\mathbb{R}$.

La funzione è localmente integrabile perché continua a tratti, non è integrabile (è infinita a $\pm\infty$), non è primitivabile (presenta una discontinuità di tipo salto in 0).

(ii) Si calcoli

$$\int_{-4}^{16} f(x)\,dx =$$

$$\int_{-4}^{16} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} (x + 3\sqrt{-x} - 2)\,dx + \int_{0}^{16} (x - 3\sqrt{x} - 4)\,dx = -64.$$

(iii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-4}^{16} f'(x)\,dx =$$

$$\int_{-4}^{16} f'(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f'(x)\,dx + \int_{0}^{16} f'(x)\,dx = \big(\lim_{x\to 0^-} f(x) - f(-4)\big) + \big(f(16) - \lim_{x\to 0^+} f(x)\big) = 2.$$

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t^3 - t - 6}\,dt$$

(*i*) Si consideri la funzione polinomiale $\varphi(t) = t^3 - t - 6$. Si verifichi che 2 è l'unico zero di φ.

Si ha $\varphi'(t) = 3t^2 - 1$ e $\varphi'(t) = 0$ se e solo se $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Si osserva che $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di massimo relativo per φ e $\varphi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, quindi la cubica $\varphi(t)$ è negativa per $t < 2$ e positiva per $t > 2$.

(*ii*) Si determini il dominio della funzione f.

L'integrale non è definito se 2 appartiene all'intervallo di integrazione perché la funzione argomento è infinita nel punto 2 di ordine 1. Quindi certamente $x \neq 2$ e $x \neq \pm\sqrt{2}$. La funzione è definita purché il punto 2 non appartenga all'intervallo di estremi x e x^2. Se $x > 2$ la funzione è chiaramente definita. Se $x \in]\sqrt{2}, 2[$ si ha $2 \in]x, x^2[$ e quindi la funzione non è definita in x. Se $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ si ha $x < 2$ e $x^2 < 2$ e quindi la funzione f è definita in x. Se $x < -\sqrt{2}$ si ha $2 \in]x, x^2[$ e quindi f non è definita in x. In conclusione la funzione f è definita su $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]2, +\infty[$.

(*iii*) Si calcoli la derivata $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x^3}{x^6 - x^2 - 6} - \frac{x}{x^3 - x - 6}.$$

(*iv*) Si determini l'ordine di infinitesimo di f in $x = 0$ e si stabilisca se $x = 0$ è un punto di minimo, massimo, flesso per f.

Si ha $f(0) = f'(0) = 0$. Calcoliamo $f''(0)$ (nel calcolo della derivata seconda evitiamo di calcolare i prodotti in cui un fattore sarà nullo):

$$f''(0) = \frac{6x^2 \cdot (...) - x^3 \cdot (...)}{\dots} - \frac{(x^3 - x - 6) - x \cdot (...)}{(x^3 - x - 6)^2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{6}.$$

Si ha $f''(0) > 0$. Per il lemma di Peano, f è infinitesima di ordine 2 in 0. Inoltre, 0 è un punto di minimo.