Esame di Analisi matematica I
Prova di esercizi
Corso del Professor Franco Obersnel
Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1.

Si consideri la successione di numeri reali $(x_n)_n$ definita per ricorrenza da

$$x_0 = 1; \qquad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Si verifichi che la successione $(x_n)_n$ è limitata (ad esempio si provi che $|x_n| \leq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

Passo base $n = 0$: $1 \leq 3$;

Passo induttivo : $|x_n| \leq 3 \Rightarrow |x_{n+1}| = \sqrt{6+x_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$

(ii) Si verifichi che la successione $(x_n)_n$ è monotona.

$0 < x_n < \sqrt{6+x_n}$ è verificata se e solo se $0 < x_n^2 < 6 + x_n$

$t^2 - t - 6 = 0 \leadsto t = -2, 3$ quindi $x_n^2 - x_n - 6 < 0$

essendo $0 < x_n < 3$.

(iii) Si verifichi che la successione $(x_n)_n$ ammette limite.

La successione è monotona e limitata e quindi ammette limite finito per il Teorema di esistenza del limite di una succ. monot.

(iv) Si calcoli $\lim_{n \to +\infty} x_n =$

Sia $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$; allora $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \sqrt{6+\ell}$

quindi $\ell = \sqrt{6+\ell}$ cioè $\ell = 3$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x^3 e^{-x}$.

(i) Si determinino i segni di f e i limiti di f a $-\infty$ e a $+\infty$.

$f(x) < 0$ se $x < 0$, $f(x) > 0$ se $x > 0$, $f(0) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(ii) Si calcolino f' e f''.

$f'(x) = x^2 e^{-x} (3 - x)$

$f''(x) = x e^{-x} (x^2 - 6x + 6)$

(iii) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.

$f'(3) = 0$; $f'(x) > 0$ se $x < 3$, $x \neq 0$, $f'(x) < 0$ se $x > 3$

$f'(0) = 0$ punti critici 0 e 3.

(iv) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi e assoluti di f.

f crescente su $]-\infty, 3]$ e decrescente su $[3, +\infty[$; 3 punto di massimo assoluto $\max_{\mathbb{R}} f = 27e^{-3}$, $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$

(v) Si determinino i segni di f''.

$x^2 - 6x + 6 < 0$ se e solo se $x \in]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[$; quindi

$f''(x) < 0$ su $]-\infty, 0[\cup]3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}[$; $f''(x) > 0$ su $]0, 3-\sqrt{3}[\cup]3+\sqrt{3}, +\infty[$

$f''(x) = 0$ se $x \in \{0, 3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\}$

(vi) Si determinino gli intervalli di convessità e concavità della f e gli eventuali punti di flesso.

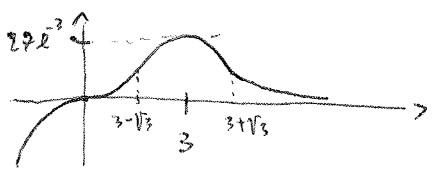
f concava su $]-\infty, 0]$ e su $[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}]$ f convessa su $[0, 3-\sqrt{3}]$ e su $[3+\sqrt{3}, +\infty[$; 0 e $3+\sqrt{3}$ punti di flesso ascendente, $3-\sqrt{3}$ p. di fl. disc.

(vii) Al variare di $q \in \mathbb{R}$ si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = q$.

$q \leq 0$ o $q = 27e^{-3}$ 1 soluzione

$0 < q < 27e^{-3}$ 2 soluzioni

$q > 27e^{-3}$ $\emptyset$ soluzioni



COGNOME e NOME ________________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3.

Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione di cui sappiamo che $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 2, \varphi''(0) = 3, \varphi'''(0) = 4$. Si consideri la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \varphi(t)\, dt$.

(*i*) Si calcolino f', f'', f'''.

$$f'(x) = \varphi(x^2) \cdot 2x$$

$$f''(x) = \varphi'(x^2) \cdot 4x^2 + \varphi(x^2) \cdot 2$$

$$f'''(x) = \varphi''(x^2) \cdot 8x^3 + \varphi'(x^2) \cdot 8x + \varphi'(x^2) \cdot 4x$$

(*ii*) Si scriva il polinomio di Taylor-MacLaurin di ordine 3 della funzione $f(x)$.

$$f(0) = f'(0) = f'''(0) = 0 \qquad f''(0) = \varphi(0) \cdot 2 = 2$$

$$P(x) = x^2$$

(*iii*) Si stabilisca l'ordine di infinitesimo della funzione f in 0.

per il lemma di Peano $\quad \mathrm{ord}_0 f = 2$

(*iv*) Si calcoli il limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 - \cos(2x)} =$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2}{4x^2} \cdot \frac{(2x)^2}{1 - \cos(2x)} + \frac{o(x^2)}{1 - \cos(2x)} \right] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO N. 4.

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{|1-x|}}$.

(*i*) Si stabilisca se f è integrabile sull'intervallo $]0,1[$.

No, perché $\mathrm{Ord}_0 f = 1$

(*ii*) Si stabilisca se f è integrabile sull'intervallo $]1,+\infty[$.

Sì, perché $\mathrm{Ord}_1 f = \frac{1}{2} < 1$ e $\mathrm{ord}_{+\infty} f = \frac{3}{2} > 1$

(*iii*) Si calcoli l'integrale

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx =$$

$y = \sqrt{x-1}$ $\quad y^2 = x-1$

$x = y^2+1$ $\quad dx = 2y\,dy$

$x = 1 \to y = 0$, $x = 2 \to y = 1$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)\cdot y} \cdot 2y\,dy = 2\,\mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{2}$$