**Esame di Analisi matematica I : esercizi**

**Dr. Franco Obersnel**

**Sessione autunnale, appello unico**

**COGNOME e NOME** ______________________ **N. Matricola** ________

**Anno di Corso** ______ **Laurea in Ingegneria** ______________________

**ESERCIZIO N. 1.**

$(i)$ Si spieghi perché $\displaystyle\int_{-a}^{a} \operatorname{sen}(t^3)\,dt = 0$ per ogni $a \in [0, +\infty[$.

La funzione $\operatorname{sen}(t^3)$ è dispari,
quindi il suo integrale su un intervallo simmetrico intorno dell'origine è nullo.

$(ii)$ Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ parametri, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < -1, \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \operatorname{sen}(t^3)\,dt & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ cx + d & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

• Si determinino i parametri $a, b, c, d$ in modo tale che $f$ sia continua in $\mathbb{R}$.

Osservo che $f(-1) = \displaystyle\int_{-1}^{-1} \operatorname{sen}(t^3)\,dt = 0$ e, per quanto verificato in $(i)$, si ha anche $f(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(t^3)\,dt = 0$. Affinché la funzione $f$ sia continua in $-1$ deve essere $-a + b = 0$, cioè $a = b$, e, affinché la funzione $f$ sia continua in 1 deve essere $c + d = 0$, cioè $d = -c$. Pertanto la soluzione è: per ogni $a, c \in \mathbb{R}$, $b = a$, $d = -c$.

• Si determinino i parametri $a, b, c, d$ in modo tale che $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < -1, \\ \operatorname{sen}(x^3) & \text{se } -1 < x < 1, \\ c & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

La derivata sinistra in $-1$ è $a$, mentre la derivata destra è $\operatorname{sen}((-1)^3)$; si chiede $f'$ continua in $-1$, quindi deve essere $a = -\operatorname{sen}(1)$. Per ottenere la continuità di $f'$ in 1 si ottiene in modo simile $c = \operatorname{sen}(1)$. Pertanto la soluzione è $a = b = d = -\operatorname{sen}(1)$, $c = \operatorname{sen}(1)$.

**ESERCIZIO N. 2.** Si consideri la funzione $f(x) = e^{x-\frac{1}{x^2}}$

($i$) Si determinino

• il dominio e i segni di $f$:
Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la funzione è sempre strettamente positiva perché è un esponenziale.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ • $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• $f'(x) = e^{x-\frac{1}{x^2}}(1 + 2x^{-3})$

• i segni di $f'$:
studiamo

$$1 + 2x^{-3} = \frac{x^3+2}{x^3} > 0;$$

poniamo $x_0 = -\sqrt[3]{2}$;

si ha allora $f'(x_0) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x \in ]-\infty, x_0[ \cup ]0, +\infty[$,
$f'(x) < 0$ se $x \in ]x_0, 0[$.

• la crescenza, la decrescenza, gli estremi relativi e assoluti di $f$:

$f$ crescente su $]-\infty, x_0]$ e su $]0, +\infty[$;

$f$ decrescente su $[x_0, 0[$

$x_0$ è punto di massimo relativo, non esistono punti di minimo,

non ci sono minimo e massimo assoluti,

$\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$.

• $f''(x) = e^{x-\frac{1}{x^2}}(1 + 2x^{-3})^2 - 6e^{x-\frac{1}{x^2}}x^{-4} = e^{x-\frac{1}{x^2}}x^{-6}(x^6 - 6x^2 + 4x^3 + 4)$.

($ii$) Si dimostri che $f$ ha almeno due punti di flesso.

Si ha ad esempio
$f''(-2) > 0$, $f''(-1) < 0$, $f''(1) > 0$;
la derivata seconda si annulla in almeno due punti per il teorema degli zeri di Bolzano, e in questi punti cambia segno.
Pertanto la funzione $f$ ha almeno un punto di flesso discendente nell'intervallo $]-2, -1[$ e almeno un punto di flesso ascendente nell'intervallo $]-1, 1[$.

**COGNOME e NOME** ______________________________ **N. Matricola** ____________

**ESERCIZIO N. 3.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x) - 1}{(\pi^{2x} - 1) \cdot \operatorname{arctg}(x)}$$

$(i)$ Si calcoli, se esiste, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{\pi^2}{4 \log \pi}$.

$$f(x) = -\frac{1 - \cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{2x}{\pi^{2x} - 1} \cdot \frac{x}{\operatorname{arctg}(x)} \cdot \frac{\pi^2}{2} \to -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log \pi} \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{2}.$$

$(ii)$ Si calcoli, se esiste, $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ non esiste

infatti, il denominatore tende a $\frac{\pi}{2}$, mentre il numeratore oscilla tra $-2$ e $0$.
Formalmente, possiamo cosiderare la successione $(x_n)_n$, tendente a $-\infty$, definita da $x_n = 1 - 2n$; allora

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\frac{4}{\pi}.$$

Invece, se consideriamo la successione $(z_n)_n$, tendente a $-\infty$, definita da $z_n = -2n$; si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(z_n) = 0.$$

Per i teoremi sul limite delle restrizioni e di unicità del limite si conclude.

$(iii)$ Si calcoli, se esiste, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Infatti il numeratore è limitato, mentre il denominatore tende a $+\infty$.

**ESERCIZIO N. 4.** Si calcoli
$$\int_0^1 \left( \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt \right) dx.$$

**RISULTATO**

$$\frac{1}{2}\log 2 - 1 + \frac{\pi}{4}$$

**SVOLGIMENTO**

Si ha
$$\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\log(x^2+1),$$
pertanto
$$\int_0^1 \left( \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,dx =$$
integrando per parti
$$= \left[ \frac{1}{2}\log(x^2+1)\cdot x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log 2 + [-x + \operatorname{arctg}(x)]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2 - 1 + \frac{\pi}{4}$$