Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione invernale, III appello

COGNOME e NOME ____________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ____________________

ESERCIZIO N. 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, si consideri la funzione $h_\alpha(t) = \frac{1-\cos t}{t^\alpha}$.

(i) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si calcolino i limiti $\lim\limits_{t\to 0^+} h_\alpha(t) =$ e $\lim\limits_{t\to +\infty} h_\alpha(t) =$

$\lim\limits_{t\to 0^+} h_\alpha(t) = 0$ se $\alpha < 2$, $= \frac{1}{2}$ se $\alpha = 2$, $= +\infty$ se $\alpha > 2$.

$\lim\limits_{t\to +\infty} h_\alpha(t) = 0$ per ogni $\alpha > 0$

(ii) Si determini, giustificando la risposta, l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}^+$ per i quali è possibile considerare la funzione $f_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \int_0^x h(t)\, dt.$$

Applichiamo il criterio dell'ordine di infinito per la convergenza dell''integrale generalizzato sull'intervallo $]0, x]$. Se $\alpha \leq 2$ la funzione è limitata (e continua) su $]0, x]$, quindi integrabile. Se $\alpha > 2$ l'ordine di infinito di h_α in 0 è $\alpha - 2$, pertanto la funzione è integrabile sin senso generalizzato se $\alpha < 3$. Se invece $\alpha \geq 3$ la funzione non è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $]0, x]$. L'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}^+$ per i quali è possibile considerare la funzione f_α è pertanto $]0, 3[$.

(iii) Si calcoli la derivata della funzione f_α e si stabiliscano i segni di f'_α e gli intervalli di monotonia di f_α.

$f'(x) = \frac{1-\cos x}{x^\alpha}$. Si ha $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $x = 2n\pi$. La funzione è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$.

(iv) Tra i parametri α determinati in (ii) si determinino, giustificando la risposta, quelli per i quali la funzione f_α è limitata in $]0, +\infty[$.

La funzione f_α è crescente. Perciò la funzione f_α è limitata se e solo se è integrabile in senso generalizzato su $]0, +\infty[$. Usando il criterio dell'ordine di infinitesimo, si conclude che questo accade se e solo se $\alpha \in]1, 3[$.

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - x & \text{se } x^2 + x - 2 \geq 0 \\ -2x^2 + 2x - 2 & \text{se } x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

(i) Si determinino gli zeri e i segni di f:

Si osservi che la funzione $-2x^2 + 2x - 2$ è sempre negativa. La funzione $x^3 - 2x^2 - x$ si annulla nei punti $x = 0$, $x = 1 - \sqrt{2}$ e $x = 1 + \sqrt{2}$. Si conclude pertanto che $f(x) < 0$ se $x \in]-\infty, 1 + \sqrt{2}[$, $f(x) > 0$ se $x \in]1 + \sqrt{2}, +\infty[$ e $f(x) = 0$ se $x = 1 + \sqrt{2}$.

(ii) Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è continua. Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è derivabile e si calcoli la derivata di f in questi punti. Si determini l'insieme dei punti in cui la funzione f è due volte derivabile e si calcoli la derivata seconda di f in questi punti.

Si osserva che $\lim_{x \to -2} = f(-2) = -14$ e $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -2$, quindi f è continua su $\mathbb{R}$.

Si ha $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ se $x < -2$ oppure $x > 1$, $f'(x) = -4x + 2$ se $-2 < x < 1$. In particolare $f'_s(-2) = 19$ mentre $f'_d(-2) = 10$. Perciò f non è derivabile in -2. Invece f è derivabile in $x = 1$ e si ha $f'(1) = -2$.

Si ha $f''(x) = 6x - 4$ se $x < -2$ oppure $x > 1$, $f'(x) = -4$ se $-2 < x < 1$. In particolare $f''_s(1) = -4$ mentre $f''_d(1) = 2$. Perciò f non è due volte derivabile nei punti -2 e 1.

(iii) Si determinino gli intervalli di crescenza, decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

Per $x < -2$ si ha $f'(x) > 0$. Nell'intervallo $]-2, 1[$ la funzione ha come grafico una parabola concava con vertice in $\frac{1}{2}$. Se $x > 1$ si ha $f'(x) < 0$ se $x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ e $f'(x) > 0$ se $x > \frac{2+\sqrt{7}}{3}$. Pertanto f è crescente su $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e su $[\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty[$, è decrescente su $[\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}]$. La funzione presenta un punto di massimo relativo in $\frac{1}{2}$ e un punto di minimo relativo in $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$. $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$.

(iv) Si determinino gli intervalli di concavità, convessità e i punti di flesso di f:

La parabola $-2x^2 + 2x - 2$ è sempre concava mentre la derivata seconda della cubica $x^3 - 2x^2 - x$ si annulla in $x = \frac{2}{3} < 1$. Pertanto la funzione f è sicuramente concava nell'intervallo $]-\infty, -2]$ e nell'intervallo $[-2, 1]$, mentre è convessa in $[1, +\infty[$. Si osserva inoltre che $f'_s(-2) > f'_d(-2)$, quindi la funzione è concava sull'intero intervallo $]-\infty, 1]$. Invece la derivata ha un punto di minimo in $x = 1$, poiché a sinistra del punto f' è decrescente mentre a destra f' è crescente. Pertanto $x = 1$ è un punto di flesso ascendente per f.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{arctg} x)\sqrt{1-\cos x}}{x-\ln(1+x)}$$

e si stabilisca, giustificando la risposta, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)\sqrt{1-\cos x}}{x-\ln(1+x)}.$$

RISULTATO

Il primo limite è $\sqrt{2}$. Il secondo non esiste perché i limiti destro e sinistro sono diversi nel punto.

SVOLGIMENTO

Possiamo riscrivere la frazione come

$$\frac{(\operatorname{arctg} x)\sqrt{1-\cos x}}{x-\ln(1+x)} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} \cdot \frac{|x|\,x}{x-\log(1+x)}$$

I limiti per $x \to 0$ dei primi due fattori sono limiti notevoli e valgono rispettivamente 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il limite del terzo fattore si calcola facilmente usando la regola di de l'Hospital; è 2 se $x > 0$ mentre è -2 se $x < 0$.

ESERCIZIO N. 4. Si calcoli

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg }(x)}{(x-2)^2}\,dx.$$

RISULTATO

$$\frac{3}{20}\pi - \frac{3}{10}\log 2$$

SVOLGIMENTO

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 \frac{\text{arctg }(x)}{(x-2)^2}\,dx. = \Big[-\frac{1}{x-2}\text{arctg }(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\big(-\frac{1}{x-2}\big)\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(x-2)}\,dx.$$

Decomponendo la frazione con Hermite si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(x-2)}\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1 \Big(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1}\Big)\,dx = \frac{1}{5}\Big[\log|x-2| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\text{arctg }x\Big]_0^1$$

$$= -\frac{1}{10}\pi - \frac{3}{10}\log 2$$