Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, III appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Sia

$$f(x) = \int_{e^{-x^2}}^{e^x} \frac{\log t}{t} dt.$$

Si determinino

• il dominio di f:

Il dominio è $\mathbb{R}$. Infatti, la funzione argomento è definita se $t > 0$ e gli estremi di integrazione sono positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$.

• $f'(x) =$

$$f'(x) = \frac{\log(e^x)}{e^x} \cdot e^x - \frac{\log(e^{-x^2})}{e^{-x^2}} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = x - 2x^3$$

• $f''(x) =$

$f''(x) = 1 - 6x^2$.

• $f'''(x) =$

$f'''(x) = -12x$

• per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, il polinomio $p_{n,0}$ di Taylor-Maclaurin di f:

Si ha $f(0) = f'(0) = 0$; $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, $f''''(0) = -12$, $f^{(n)}(0) = 0$ se $n \geq 5$.

Quindi

$p_{1,0}(x) = 0$;

$p_{n,0}(x) = \frac{1}{2}x^2$ se $n = 2, 3$;

$p_{n,0}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4$ se $n \geq 4$.

• $\text{ord}_0 f =$

$\text{ord}_0 f = 2$ per il lemma di Peano, essendo $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1 \neq 0$.

Nota. L'esercizio si poteva anche svolgere calcolando esplicitamente l'integrale, posto $s = \log t$, $ds = \frac{1}{t}dt$, si ottiene subito

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4.$$

A questo punto tutti i quesiti erano di risposta immediata.

ESERCIZIO N. 2.

Si consideri la funzione $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{1 - x^2}}$$

(i) Si determini il dominio E della funzione f e si stabilisca se la funzione f presenta qualche simmetria.

Il dominio è $\mathbb{R}$. Infatti, l'argomento della radice quadrata è sempre non negativo, essendo

$$1 - \sqrt[3]{1 - x^2} \geq 0 \Longleftarrow 1 - x^2 \leq 1 \Longleftarrow x^2 \geq 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione è pari.

(ii) Se possibile, si calcoli esplicitamente la funzione inversa della funzione f ristretta all'insieme $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$.

Sia $y \geq 0$. Si ha

$$y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{1 - x^2}} \Longrightarrow y^2 = 1 - \sqrt[3]{1 - x^2} \Longrightarrow 1 - x^2 = (1 - y^2)^3 \Longrightarrow x = \sqrt{1 - (1 - y^2)^3}$$

(iii) Si calcoli, dove possibile, la derivata $f'(x)$ e si determinino eventuali punti dove f non è derivabile. Nel punto $x = 0$ si calcolino la derivata destra e sinistra e si stabilisca se la funzione è derivabile in 0.

Sia $x \neq 0$, $x \neq 1$. Allora

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt[3]{1 - x^2}}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - \sqrt[3]{1 - x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}$$

Per il teorema sul limite della derivata, nei punti -1 e 1 si ha $f'(-1) = \lim_{x \to -1} f'(x) = -\infty$, $f'(1) = \lim_{x \to 1} f'(x) = +\infty$. Pertanto la funzione in questi punti non è derivabile.

Sempre per il teorema sul limite della derivata, usando nel calcolo il noto limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, si ottiene

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{-x^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Per la simmetria della funzione si ha $f'_s(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pertanto non esiste la derivata della funzione in 0.

COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \text{arcsen}\,(x^2 - 4x + 1)$$

(i) Si determini il dominio di f.

Dobbiamo imporre $-1 \leq x^2 - 4x + 1 \leq 1$.
Risolvendo l'equazione $x^2 - 4x + 2 \geq 0$, si ottiene $x \in]-\infty, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, +\infty[$.
Risolvendo l'equazione $x^2 - 4x \leq 0$, si ottiene $x \in [0, 4]$.
Pertanto il dominio di f è $[0, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, 4]$.

(ii) Si determini una primitiva della funzione arcsen (x).

Integrando per parti si ottiene subito $F(x) = x\,\text{arcsen}\,(x) + \sqrt{1 - x^2}$.

(ii) Si calcoli l'integrale

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x - 2)\,\text{arcsen}\,(x^2 - 4x + 1)\,dx$$

Si ha $x - 2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 1)$, per cui, integrando per sostituzione,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (x - 2)\,\text{arcsen}\,(x^2 - 4x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{16}}^{-\frac{3}{4}} \text{arcsen}\,(y)\,dy =$$

$$= \frac{3\,\text{arcsen}\,(3/4) + \sqrt{7}}{8} - \frac{\text{arcsen}\,(1/16) + \sqrt{255}}{32}.$$

ESERCIZIO N. 4. Al variare dei parametri reali a, b, c si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1; \\ ax^2+bx+c & \text{se } -1 < x < 1; \\ 1-x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Si determini l'insieme dei parametri a, b, c per i quali la funzione è continua su $\mathbb{R}$

Per avere la continuità nei punti -1 e 1 si deve imporre

$$\begin{cases} 1 = a - b + c; \\ 0 = a + b + c. \end{cases}$$

Si ottiene allora $b = -\frac{1}{2}$, $a + c = \frac{1}{2}$.

(ii) Si determini l'insieme dei parametri a, b, c per i quali la funzione è derivabile su $\mathbb{R}$.

Per controllare la derivabilità si deve imporre $b = -\frac{1}{2}$, $a + c = \frac{1}{2}$, e

$$\begin{cases} 1 = -2a + b; \\ -1 = 2a + b. \end{cases}$$

Il sistema non è risolvibile, quindi l'insieme è vuoto.

(iii) Si ponga $a = c = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$.

• Per questa funzione si determinino i massimi e minimi relativi e assoluti e si studino gli intervalli di monotonia. In particolare, si stabilisca se la funzione è monotona su $[-1, +\infty[$.

Si osservi che con questa scelta dei parametri la funzione f è continua. Il grafico è unione di due porzioni di retta e di una porzione di parabola. Studiamo la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Questa ha vertice nel punto $(1, 0)$, dove assume il valore minimo. La funzione f è pertanto crescente su $]-\infty, -1]$ e ha nel punto -1 un punto di massimo assoluto: $\max f = 1$. La funzione è decrescente su $[-1, +\infty[$ e $\inf f = -\infty$. Chiaramente $\inf f = -\infty$. Si invita il lettore a disegnare il grafico della funzione.

• Per questa funzione si determinino gli intervalli di convessità. In particolare, si stabilisca se la funzione è convessa su $[-1, +\infty[$.

La funzione è lineare su $]-\infty, -1]$ (quindi sia concava che convessa in senso debole), inoltre è convessa strettamente su $[-1, 1]$ e lineare su $[1, +\infty[$. La funzione non ha punti di flesso (nel punto 1 si ha un cambio di concavità, ma la funzione non è derivabile nel punto). Pur essendo convessa sui due intervalli $[-1, 1]$ e $[1, +\infty[$, la funzione non è convessa (nemmeno in senso debole) sull'intervallo $[-1, +\infty[$, perché si ha $f'_s(1) = 0 > -1 = f'_d(1)$, contro la nota proprietà delle funzione convesse $f'_s(x) \leq f'_d(x)$ per ogni x.