Esame di Analisi matematica I

Prova di esercizi

Corso del Professor Franco Obersnel

Sessione estiva, I appello

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

Anno di Corso ________ **Laurea in Ingegneria** ______________________

ESERCIZIO N. 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\,(2x)\Big).$$

(i) Si calcoli, se possibile, il limite $\lim_{x\to 0} f(x) =$

Il limite non esiste perché il limite destro è $+\infty$ mentre il limite sinistro è $-\infty$.

(ii) Si calcoli, se possibile, il limite $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) =$

Non è possibile calcolare il limite perché il punto $\frac{\pi}{2}$ non è un punto di accumulazione del dominio della funzione $dom(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iii) Si calcoli, se possibile, il limite $\lim_{x\to 0} \Big(\operatorname{sen}(x) \cdot f(x)\Big) = \dfrac{1}{2}$

Infatti, scrivendo la tangente come rapporto di seno e coseno e osservando che si ha $\cos\big(\frac{\pi}{2} - y\big) = \operatorname{sen}(y)$ e $\operatorname{sen}\big(\operatorname{arcsen}\,(2x)\big) = 2x$, si può scrivere

$$\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\,(2x)\big) \cdot \frac{1}{\cos\big(\frac{\pi}{2} - \arcsin(2x)\big)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} \cdot \operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\,(2x)\big) \to \frac{1}{2}.$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri la funzione reale definita da $f(x) = \log x - \operatorname{arctg}(x-1)$.

(i) Si determini il dominio di f.

$]0, +\infty[$.

(ii) Si calcolino i limiti $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

(iii) Si calcoli $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x\big(1 + (x-1)^2\big)}$$

(iv) Si determinino i punti critici di f e i segni di f'.

$f'(x) > 0$ se $x \in]0,1[\cup]2,+\infty[$; $f'(x) < 0$ se $x \in]1,2[$; punti critici $x = 1$ e $x = 2$.

(v) Si determinino gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo relativi di f.

f crescente su $]0,1]$ e su $[2,+\infty[$. f decrescente su $[1,2]$. 1 è punto di massimo relativo ($f(1) = 0$); 2 è punto di minimo relativo $f(2) = \log(2) - \frac{\pi}{4}$.

(vi) Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Una soluzione se $\alpha < \log 2 - \frac{\pi}{4}$ oppure $\alpha > 0$;
2 soluzioni se $\alpha = \log 2 - \frac{\pi}{4}$ oppure $\alpha = 0$;
3 soluzioni se $\log 2 - \frac{\pi}{4} < \alpha < 0$.

(vii) Si considerino i due numeri reali $\phi_1 = \log(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $\phi_2 = \frac{\pi}{6}$.
Si stabilisca, giustificando la risposta, se $\phi_1 < \phi_2$ oppure $\phi_1 > \phi_2$.

Si ha $f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \phi_1 - \phi_2$. Poiché $1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} < 2$, $f(1) = 0$ e f è decrescente sull'intervallo $[1,2]$, si ha $f(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ e quindi $\phi_1 < \phi_2$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si consideri una funzione derivabile $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ che verifica, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(i) Si provi che esiste una successione di numeri reali $(x_n)_n$ che verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e $f(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Applico il teorema di esistenza degli zeri di Bolzano: su ogni intervallo $[n, n+1]$ la funzione f è continua (essendo derivabile) e assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo; perciò esiste uno zero x_n di f tale che $n < x_n < n+1$. Chiaramente $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (2 carabinieri).

(ii) Si provi che esiste una successione di numeri reali $(y_n)_n$ che verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ e $f'(y_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Applico il teorema di Rolle: su ogni intervallo $[x_n, x_{n+1}]$ la funzione f è derivabile e assume lo stesso valore agli estremi ($f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$). Perciò esiste un punto y_n tale che $x_n < y_n < x_{n+1}$ tale che $f'(y_n) = 0$. Chiaramente $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ (2 carabinieri).

(iii) Si provi che esiste una successione di numeri reali $(z_n)_n$ che verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ e $f'(z_n) = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

Applico il teorema di Lagrange: su ogni intervallo $[n, n+1]$, con n dispari, la funzione f è derivabile; perciò esiste z_n tale che $n < z_n < n+1$ e $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = f(n+1) - f(n) = f'(z_n) \cdot (n+1-n) = f'(z_n)$. Chiaramente $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ (2 carabinieri).

ESERCIZIO N. 4. Si consideri la funzione $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

(i) Si stabilisca l'esistenza di eventuali simmetrie di φ.

$\varphi(-x) = -\varphi(x)$, quindi φ è dispari.

(ii) Si calcoli la derivata di φ.

$$\varphi'(x) = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

(iii) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\cos\big(\varphi(x)\big)\ dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\cos\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\ dx = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1).$$

(iv) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^1 \left[\operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big) + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\cos\big(\varphi(x)\big)\right]\ dx =$$

Usiamo la linearità dell'integrale e calcoliamo separatamente l'integrale dei due addendi che compongono l'argomento. Poiché la funzione $\operatorname{sen}\big(\varphi(x)\big)$ è dispari essendo composta di funzioni dispari, l'integrale del primo addendo sull'intervallo simmetrico $[-1,1]$ è nullo. Inoltre, il secondo addendo è una funzione pari, pertanto l'integrale cercato è il doppio del valore calcolato nel punto precedente, cioè $\operatorname{sen}(1)$.