Esame di Analisi matematica I : esercizi

Corso: OMARI ○ TIRONI ○

A.a. 2001-2002, sessione invernale, II appello

COGNOME e NOME ________________ **N. Matricola** ________

Anno di Corso ______ **Laurea in Ingegneria** ________________

Appello in cui si intende sostenere la prova di teoria : **II** ○ **III** ○ **VOTO** ______

ESERCIZIO N. 1. Si trovino nel piano complesso $\mathbb{C}$ tutte le soluzioni dell'equazione

$$i \cdot z^3 = (\overline{z})^5 ,$$

dove $\overline{z}$ indica il coniugato del numero complesso z.

RISULTATO

Ci sono nove soluzioni; $z = 0$ e $z_k = [1, -\frac{\pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{4}]$, $k = 0, \ldots, 7$.

SVOLGIMENTO Scriviamo i numeri complessi in forma trigonometrica: $z = [\rho, \theta]$. Allora l'equazione diviene

$$[1, \frac{\pi}{2}] \cdot [\rho, \theta]^3 = [\rho, -\theta]^5 \quad .$$

Infatti, $i = [1, \frac{\pi}{2}]$ e, se $z = [\rho, \theta]$, allora $\overline{z} = [\rho, -\theta]$. Facendo i calcoli, si trova

$$[\rho^3, \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \theta] = [\rho^5, -5 \cdot \theta].$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti a meno di multipli di 2π, si trova il sistema

$$\begin{cases} \rho^3 & = \rho^5 \\ \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \theta & = -5 \cdot \theta \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione del modulo sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. A $\rho = 0$ corrisponde la soluzione $z = 0$. Le soluzioni di modulo 1 hanno gli argomenti che sono soluzioni della seguente equazione

$$8 \cdot \theta = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad .$$

Quindi troviamo le otto soluzioni con $\rho = 1$ e $\theta_k = -\frac{\pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{4}, k = 0, \ldots, 7$. A queste è da aggiungere la soluzione $z = 0$, come già osservato.

ESERCIZIO N. 2. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$\frac{d^n}{d\,x^n}(x \cdot e^x) = (x+n) \cdot e^x \quad .$$

DIMOSTRAZIONE

Se $n = 1$ si ha $(x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$. Dunque per $n = 1$ la proposizione è soddisfatta. Supponiamola valida per $n-1$ e mostriamo che allora vale per n.

Per ipotesi induttiva $\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(x \cdot e^x) = (x+n-1) \cdot e^x$.

Ma $\frac{d^n}{d\,x^n}(x \cdot e^x) = \frac{d}{d\,x}\big(\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(x \cdot e^x)\big) = \frac{d}{d\,x}\big((x+n-1) \cdot e^x\big) = 1 \cdot e^x + (x+n-1) \cdot e^x = (x+n) \cdot e^x$.

Per induzione la proposizione è provata.

COGNOME e NOME ________________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. Si dimostri che l'equazione

$$\cos x - x^3 \arctan x = 0$$

ha almeno due soluzioni (di segno opposto).

RISULTATO

Applicando il teorema di connessione, si trova un punto $x_1 < 0$ in cui $\cos x_1 - x_1^3 \arctan x_1 = 0$ e un punto $x_2 > 0$ in cui $\cos x_2 - x_2^3 \arctan x_2 = 0$

SVOLGIMENTO

Sia $f(x) = \cos x - x^3 \arctan x$. Osserviamo che $f(0) = 1 > 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e che, analogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Infatti $\cos x$ si mantiene limitato, mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x^3 \arctan x) = +\infty\,.$$

Per la definizione di limite per $x \to \pm\infty$ esiste qualche $h < 0$ dove $f(h) < 0$ e qualche $k > 0$ dove, parimenti, $f(k) < 0$.

Poiché $f(h) < 0$ e $f(0) > 0$ e, ancora, $f(k) < 0$, applicando il teorema di connessione alla funzione **continua** $f(x)$ sull'intervallo $[h, 0]$, si conclude che esiste (almeno) un punto $h < x_1 < 0$ dove $f(x_1) = 0$ e applicando lo stesso teorema alla stessa funzione sull'intervallo $[0, k]$, si trova (almeno) un punto $0 < x_2 < k$ dove $f(x_2) = 0$,

ESERCIZIO N. 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = |x| \cdot 2^x \,.$$

(i) Si determinino:

- il dominio e i segni di f : $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R}$; $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si annulla solo per $x = 0$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- $f'(x) = \frac{|x|}{x} \cdot 2^x + |x| \cdot 2^x = |x| \cdot 2^x \cdot (\frac{1}{x} + \log 2)$, per $x \neq 0$. Cioè

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot (1 + x\log 2), & \text{se } x > 0 \\ 2^x \cdot (-1 - x\log 2), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

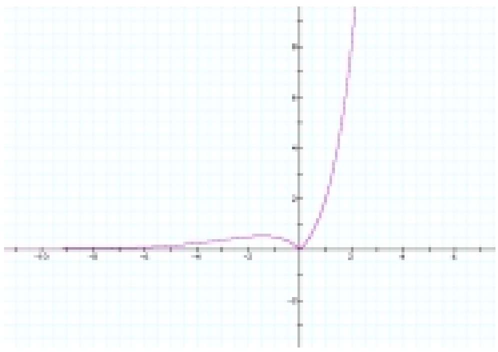
- $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^-} f'(x) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

- i segni di f': $f'(x) < 0$ per $x < -\frac{1}{\log 2}$ e per $x > 0$.

- la crescenza, la decrescenza e gli estremi relativi e assoluti di f:

La funzione è crescente per $x < -\frac{1}{\log 2}$ e per $x > 0$. Decrescente per $-\frac{1}{\log 2} < x < 0$. Il punto $x = -\frac{1}{\log 2}$ è un punto di massimo relativo; $f(-\frac{1}{\log 2}) = \frac{1}{\log 2} \cdot 2^{-\frac{1}{\log 2}} = \frac{1}{e\cdot\log 2}$. Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto, dove $f(0) = 0$. $\sup f(x) = +\infty$.

(ii) Si determini il numero delle soluzioni $x \in \mathrm{dom} f$ dell'equazione $f(x) = t$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.



Conformemente al grafico qui sopra riportato, l'equazione $f(x) = t$ ha, per $x \in \mathrm{dom}\,(f)$: nessuna soluzione se $t < 0$; una soluzione se $t = 0$; tre soluzioni se $0 < t < \frac{1}{e\cdot\log 2}$; due soluzioni se $t = \frac{1}{e\cdot\log 2}$; una soluzione se $t > \frac{1}{e\cdot\log 2}$.

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

(i) Si determini una primitiva di $f(x)$ su $[0, 1]$.

(ii) Si calcoli $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

RISULTATO

(i) Una primitiva su $[0, 1]$ di $f(x)$ è $\frac{x^2}{2} + \log(2 - x^2)$.

(ii) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2-2}\, dx = \frac{1}{2} - \log 2$.

SVOLGIMENTO

(i) Si trova facilmente che

$$\frac{x^3}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x}{x^2 - 2} = \frac{x \cdot (x^2 - 2) + 2x}{x^2 - 2} = x + \frac{2x}{x^2 - 2}\,.$$

Si noti che allo stesso risultato si perviene dividendo il polinomio x^3 per il polinomio $x^2 - 2$. Allora la famiglia delle primitive della nostra funzione su ogni semiretta (destra o sinistra) che ha origine in $\sqrt{2}$ è data da

$$\frac{x^2}{2} + \log|x^2 - 2| + \text{cost}\,.$$

Sull'intervallo $[0, 1]$, si ha $|x^2 - 2| = 2 - x^2$. Perciò una primitiva su detto intervallo di $f(x)$ è :

$$\frac{x^2}{2} + \log(2 - x^2)\,.$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 - 2}\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \log(2 - x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \log 2\,.$$

ESERCIZIO N. 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_0^{2x} \frac{t}{t + e^t}\, dt$$

sull'intervallo $[0, +\infty[$.

(i) Si calcolino:

- $f'(x) = \dfrac{2 \cdot 2x}{2x + e^{2x}} = \dfrac{4x}{2x + e^{2x}}$.

- $f''(x) = 4 \cdot \dfrac{(1 - 2x) \cdot e^{2x}}{(2x + e^{2x})^2}$.

(ii) Si studino la concavità, la convessità e l'esistenza di punti di flesso di f su $[0, +\infty[$.

Conformemente al valore di $f''(x)$ calcolato in precedenza, si vede che $f''(x)$ è strettamente positiva se $0 < x < \frac{1}{2}$, si annulla se $x = \frac{1}{2}$ ed è negativa se $x > \frac{1}{2}$. Perciò la funzione $f(x)$ è convessa sull'intervallo $[0, \frac{1}{2}[$, concava sull'intervallo $]\frac{1}{2}, +\infty[$ ed ha un punto di flesso discendente in $x = \frac{1}{2}$.