

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

A.a. 2001–2002. Pordenone, 5 luglio 2002

Esame completo Il tempo a disposizione è di due ore.

COGNOME e NOME _____ Matr. N. _____

Anno di Corso _____ Diploma/Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. È data la serie di potenze (di centro l’origine)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n + 2^n)x^n.$$

1) Si trovi il raggio di convergenza della serie.

Il raggio di convergenza è $\frac{1}{2}$ (si usi ad esempio il criterio del rapporto).

2) Si calcoli la somma della serie. La somma è

$$\frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x}.$$

La cosa si può vedere facilmente scomponendo la serie proposta nella somma di due serie, una è una serie geometrica di ragione $2x$, l’altra è la derivata della serie geometrica moltiplicata per x .

ESERCIZIO N. 2. Si calcoli l'integrale di linea

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2 + \log z) ds ;$$

lungo la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)^T .$$

RISULTATO

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(e^3 - 1).$$

SVOLGIMENTO

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 3. Si determinino i valori massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 1 + x^2 + y^2 - 3xy^2,$$

ristretta al disco

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

RISULTATO

Minimo $5 - \frac{16\sqrt{3}}{3}$ Massimo $5 + \frac{16\sqrt{3}}{3}$ entrambi raggiunti sulla frontiera del disco

SVOLGIMENTO Si deve studiare l'annullarsi del gradiente all'interno del disco. Si troveranno un punto di minimo relativo in $(0, 0)^T$ e due punti di sella. Successivamente si studia la situazione sul bordo, utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange oppure l'esplicitazione del vincolo.

COGNOME e NOME _____

ESERCIZIO N. 4. Si determini la soluzione dell’equazione differenziale

$$x^2 y'' + 2xy' + y = x;$$

che soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(e^{\frac{\pi}{2}}) = e^{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

RISULTATO

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right)} \left(e^{\frac{3\pi}{4}} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right) \right) + \frac{x}{3}.$$

SVOLGIMENTO

Si tratta di un’equazione di Eulero.