Testi del Syllabus

Resp. Did.	**MITIDIERI ENZO**	**Matricola: 002862**
Docenti	**MITIDIERI ENZO, 4 CFU** **SINCICH EVA, 2 CFU**	

Anno offerta:	**2023/2024**
Insegnamento:	**240SM-1 - ANALISI REALE**
Corso di studio:	**SM30 - MATEMATICA**
Anno regolamento:	**2021**
CFU:	**6**
Settore:	**MAT/05**
Tipo Attività:	**B - Caratterizzante**
Anno corso:	**3**
Periodo:	**Annualità Singola**
Sede:	**TRIESTE**

Testi in italiano

Lingua insegnamento	ITALIANO
Contenuti (Dipl.Sup.)	Teoria della misura. Integrazione. Spazi di funzioni integrabili.
Testi di riferimento	E.H.Lieb, M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, 1997 Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson - Real analysis (1997, Prentice-Hall) H.L. Royden, Real Analysis, MacMillan, 1968. An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Rene ́ Erl ́ın Castillo • Humberto Rafeiro, Springer, CMS Books in Mathematics. HALMOS Measure Theory, Springer. Rudin W. - Real and complex analysis-MGH (1986). Saks S. - Theory of the integral (1937). Terence Tao - An Introduction To Measure Theory (January 2011 Draft). I libri sono acquistabili online e nelle librerie specializzate.
Obiettivi formativi	D1. Conoscenza e comprensione: Acquisire le conoscenze e le competenze relative ai risultati di base della teoria della misura, dell'integrazione e degli spazi di Lebesgue. D2. Capacità di applicare conoscenza e comprensione: Applicare le conoscenze teoriche acquisite alla risoluzione di problemi ed esercizi. D3. Autonomia di giudizio: Riconoscere le tecniche di base degli argomenti trattati ai fini della loro applicazione a nuovi problemi anche di natura applicativa. Saper valutare coerenza e correttezza dei risultati ottenuti. D4. Abilità comunicative: Acquisire la capacità di esprimere i concetti fondamentali i nell'ambito degli argomenti del corso con proprietà di linguaggio ed adeguata esposizione. D5. Capacità di apprendimento: Essere in grado di consultare autonomamente i testi specialistici, anche al di fuori degli argomenti trattati in dettaglio durante le lezioni.

Prerequisiti

Calcolo differenziale e integrale su R^n, spazi metrici. Esami propedeutici: Analisi Matematica II.

Metodi didattici

Lezioni ed esercitazioni frontali. Coinvolgimento attivo degli studenti. Esercizi da svolgere a casa disponibili sul sito. Esercitazioni e attività di gruppo.

Altre informazioni

Per appunti e esercizi si veda il sito del corso su:
https://www.dmi.units.it/~mitidier/styled-32/styled-55/index.html

Modalità di verifica dell'apprendimento

Esame orale. L'esame orale è finalizzato ad accertare la conoscenza da parte degli studenti degli aspetti teorici (teoremi e loro dimostrazioni) ed applicativi degli argomenti trattati durante il corso.

Programma esteso

https://www.dmi.units.it/~mitidier/AREA.pdf

https://www.dmi.units.it/~mitidier/styled-32/styled-55/index.html

Teoria della misura: Algebre e sigma-algebre di insiemi. Spazi di misura. Misure finite e sigma-finite. Misure complete, completamento di una misura. Nozione di misura esterna. Sigma-algebra degli insiemi misurabili e misura generata dalla misura esterna. Misura esterna di Lebesgue su Rn e misura di Lebesgue. Caratterizzazione degli insiemi misurabili. Insieme di Vitali. Insieme di Cantor e funzione di Cantor - Vitali. La σ-algebra dei Boreliani non `e completa.
Integrale di Lebesgue: Funzioni misurabili. Funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque e convergenza quasi uniforme. Teorema di Egorov-Severini. Convergenza in misura e convergenza alla Cauchy in misura. Approssimazione in misura di funzioni misurabili su Rn con funzioni a scalino e continue. Teorema di Lusin.

Integrale per funzioni semplici e per funzioni nonnegative misurabili.
Teorema di Beppo Levi (della convergenza monotona) e sue conseguenze. Lemma di Fatou. Integrale di funzioni di segno variabile. Teorema di convergenza dominata di Lebesgue e sue conseguenze. Assoluta continuit`a dell'integrale. Confronto tra integrale di Lebesgue sulla retta e integrale di Riemann. Integrali impropri e integrale di Lebesgue.
Spazi Lp - Differenziazione e Integrazione: Disuguaglianze di Young, H ¨older, Minkowsky. Convergenza in Lp e convergenza in misura. Densit`a in Lp delle funzioni semplici nulle fuori da insiemi di misura finita. Caratterizzazione duale della norma Lp, varie versioni. Disuguaglianza di Chebishev. Completezza degli spazi Lp (teorema di Riesz-Fisher). Separabilit`a di Lp e non separabilia' di L∞ .
Funzionali lineari continui su spazi normati. Il teorema di proiezione su convessi chiusi di uno spazio di Hilbert. Spazi uninformemente convessi. Esempi. Ogni spazio un informemente e' riflessivo. Teorema di Milman-Pettis (cenni). Disuguaglianze di Hanner- Clarkson, Il teorema di Riesz di rappresentazione dei funzionali lineari continui su spazi di Hilbert.Differenziazione. La funzione massimale M f . Semicontinuit`a della funzione massimale. La funzione massimale Mf non appartiene a L1loc. Spazio L1w. Il teorema di Hardy- Littlewood: la funzione massimale Mf appartiene a L1w. Il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch. Misure con segno. Il teorema di decomposizione di Hahn. Decomposizione di Jordan per misure con segno. Il teorema di Radon-Nikodym. Il teorema di decomposizione di Lebesgue. Il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari continui su Lp.

Ripresa: modi di convergenza: convergenza in misura, Teorema di F. Riesz: successioni di Cauchy in misura ammettono sottosuccessioni convergenti q.o. e in misura ad una funzione misurabile. Ogni successione di Cauchy in misura e' convergente in misura ad una funzione misurabile f, f e' unicamente determinata q.o. Convergenza dominata in misura. Convergenza quasi uniforme: successioni quasi uniformemente di Cauchy. Ogni successione quasi uniformemente di

	Cauchy ammette una sottosuccessione convergente q.u. e q.o., ad una f misurabile. Ogni successione convergente q.u. ad una f converge in misura. Se una successione converge in misura ad h allora esiste una sottosuccessione che converge q.u. ad h.

Obiettivi per lo sviluppo sostenibile

Codice	Descrizione

Testi in inglese

	Italian
	Measure theory. Integration. Spaces of integrable functions.
	E.H.Lieb, M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, 1997 Andrew M. Bruckner, Judith B. Bruckner, Brian S. Thomson - Real analysis (1997, Prentice-Hall) H.L. Royden, Real Analysis, MacMillan, 1968. An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Rene´ Erl´ın Castillo • Humberto Rafeiro, Springer, CMS Books in Mathematics. HALMOS Measure Theory, Springer. Rudin W. - Real and complex analysis-MGH (1986). Saks S. - Theory of the integral (1937). Terence Tao - An Introduction To Measure Theory (January 2011 Draft). Books can be purchased online or in specialized bookstores.
	D1. To know the fundamental results on measure theory, integration and Lebesgue spaces. D2. To apply the theoretical acquired skills to solve problems and exercises. D3. To recognize the basic techniques of the covered topics for their applications to new problems. D4. To be endowed with the competence to express the fundamental concepts with command of the language and a proper presenation. D5. To be able to autonomously consult the specialized texts.
	DIFFERENTIAL CALCULUS AND INTEGRAL CALCULUS ON R^N. METRIC SPACES. Propaedeutic exams: Analisi Matematica II.
	Frontal lessons and exercises. Active involvement of the students. Homework available on the web site. Group exercises and activities.
	For notes and exercises see the course website at: https://www.dmi.units.it/~mitidier/styled-32/styled-55/index.html
	Oral examinations. The oral examination aims to access the students' knowledge of the theoretical and the applicative aspects of the covered topics.
	https://www.dmi.units.it/~mitidier/AREA.pdf https://www.dmi.units.it/~mitidier/styled-32/styled-55/index.html Measure theory: Algebras and sigma-algebras of sets. Measure spaces. Finite and sigma-finite measure Complete measure, completion of a measure. Notion of external measure. Sigma-algebra of measurable sets and measure generated by external measure. Lebesgue external

measure on Rn and Lebesgue measure. Characterization of measurable sets. Vitali set. Cantor set and Cantor function - Vitali. Borelian σ-algebra is not complete.
Lebesgue integral: Measurable functions. Simple functions. Convergence almost everywhere and almost uniform convergence. Egorov-Severini theorem. Convergence in measure and convergence at Cauchy in measure. Approximation in measure of measurable functions on Rn with scaling and continuous functions. Lusin’s theorem.

Integral for simple functions and measurable nonnegative functions.
Beppo Levi’s theorem (of monotonic convergence) and its consequences. Fatou’s lemma. Integral of functions of variable sign. Lebesgue’s dominated convergence theorem and its consequences. Absolute continuit`a of the integral. Comparison between Lebesgue integral on straight and Riemann integral. Improper integrals and Lebesgue integral. Lp Spaces - Differentiation and Integration: Young, H older, Minkowsky inequalities. Lp convergence and measure convergence. Densit`a in Lp of null simple functions out of finite measurement sets. Dual characterization of the Lp standard, various versions. Chebishev inequality. Completeness of spaces Lp (Riesz-Fisher theorem). Separability`a of Lp and non separable of L .
Continuous linear functionals on normated spaces. The projection theorem on closed convexes of a Hilbert space. Uninform convex spaces. Examples. Each space is an informingly reflective one. Milman-Pettis theorem (hints). Hanner-Clarkson inequalities, Riesz’s theorem of representation of continuous linear functional on Hilbert.Differentiation spaces. The maximal function M f . Semicontinuit`a of the maximal function. The maximal function Mf does not belong to L1loc. Space L1w. The Hardy-Littlewood theorem: the maximal function Mf belongs to L1w. The Lebesgue-Besicovitch differentiation theorem. Measures with sign. Hahn’s decomposition theorem. Jordan decomposition by sign measurements. Radon-Nikodym theorem. Lebesgue’s decomposition theorem. Riesz’s representation theorem for continuous linear functional on Lp.

Resumption: modes of convergence: convergence to an extent, F. Riesz’s theorem: Cauchy sequences to an extent admit convergent subsuccessions q.o. and to a degree to a measurable function. Each Cauchy sequence to an extent is convergent to a measurable function f, f is uniquely determined q.o. Convergence dominated to an extent. Almost uniform convergence: Cauchy sequences almost uniformly. Each sequence of Cauchy almost uniformly admits a convergent subsequence q.u. and q.o., to a measurable f. Each converging sequence q.u. to a f converges to an extent. If a sequence converges in measure to h then there is a subsequence converging q.u. to h.

Obiettivi per lo sviluppo sostenibile

Codice	Descrizione