Prova scritta di Algebra 2
9 luglio 2007

Esercizio 1. 1. Dimostrare che $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$ è un gruppo ciclico individuando esplicitamente un generatore.

2. Dimostrare che $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3$ non è ciclico.

3. Dimostrare che $\mathbb{D}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{D}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ non sono due gruppi isomorfi. ($\mathbb{D}_4$ è il gruppo diedrale con otto elementi e $\mathbb{D}_8$ è il gruppo diedrale con sedici elementi)

Esercizio 2. Sia R un anello commutativo con unità.

1. Siano I_k con $k \in \mathbb{N}$ degli ideali di R. Si dimostri che $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ è un ideale di R.

2. Siano I_k con $k \in \mathbb{N}$ degli ideali di R tali che se $k_1 \leq k_2$ allora $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$; si dimostri che in questo caso $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ è un ideale.

3. Siano I e J degli ideali di R tali che $R = I + J = \{i + j \mid i \in I \text{ e } j \in J\}$; si dimostri che $I \cap J = IJ$ dove IJ è l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo ij con $i \in I$ e $j \in J$.

Esercizio 3. 1. Si costruisca un campo di cardinalità 27.

2. Si calcoli il massimo comune divisore dei polinomi $x^4 + x^2 + x + 1$ e $x^3 + x + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$.

Esercizio 4. 1. Dimostrare che in un reticolo distributivo e limitato se un elemento ha un complemento allora tale complemento è unico.

2. Dimostrare che in un reticolo L distributivo e limitato, l'insieme degli elementi di L dotati di un complemento è un sottoreticolo di L.