Prova scritta di Algebra 1
9 luglio 2007

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $I(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ è iniettiva}\}$ l'insieme delle funzioni iniettive da X in X.

1. Si dimostri che $(I(X); \circ)$ è un monoide dove $\circ$ indica la composizione fra funzioni.

2. Sia $\phi : X \to Y$ una funzione invertibile dall'insieme X all'insieme Y. Si dimostri che $\phi^\star : (I(X); \circ) \to (I(Y); \circ)$ con $\phi^\star(f) = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ è un omomorfismo biettivo fra monoidi.

3. Trovare un esempio in cui $(I(X); \circ)$ non è un gruppo.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R}$ sia $\sim$ la relazione definita da:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

1. Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

2. Si verifichi se $\sim$ è compatibile con la somma in $\mathbb{R}$.

3. Si verifichi se $\sim$ è compatibile con la moltiplicazione in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.

1. Si considerino in S_6 le permutazioni $\tau = (1, 2, 6, 3)$ e $\mu = (3, 5, 4)$. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni $\tau \circ \mu$, $(\tau \circ \mu)^2$ e $(\tau \circ \mu)^3$.

2. Sia G un sottogruppo di A_n con $n \geq 3$. Dimostrare che se G contiene tutti i cicli di lunghezza tre allora $G = A_n$.
   (A_n indica il gruppo alterno cioè il sottogruppo di S_n formato dalle permuatazioni pari)

Esercizio 4. Sia $f : G \to G'$ un omomorfismo di gruppi.

1. Si dimostri che $f(G)$ è un sottogruppo di G'.

2. Si dimostri che se G è abeliano anche $f(G)$ è abeliano.

3. Si dimostri che se f è un'applicazione invertibile allora $f^{-1} : G' \to G$ è un omomrfismo di gruppi.