

Prova scritta di Algebra 2
8 settembre 2008

Esercizio 1. 1. Individuare il numero di generatori presenti all'interno di un gruppo ciclico di ordine undici e di un gruppo ciclico di ordine dodici.

2. Sia G un gruppo e g un elemento in G di ordine n ; verificare che g^k è un elemento di ordine $n/(n, k)$ dove (n, k) indica il massimo comun divisore di n e k .

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo e unitario siano I e J due ideali di A . Sia IJ l'ideale costituito dalle somme finite di elementi del tipo ij con $i \in I$ e $j \in J$.

1. Si verifichi che $IJ \subseteq (I \cap J)$.

2. Se $A = I + J = \{i + j \mid i \in I \text{ e } j \in J\}$ si dimostri che $I \cap J = IJ$.

3. Mostrare un esempio in cui $IJ \neq (I \cap J)$.

Esercizio 3. 1. Nell'anello $\mathbb{R}[x]$ si scomponga in fattori irriducibili il polinomio $x^8 - 1$.

2. Si costruisca un campo di cardinalità 125.

Esercizio 4. Sia (L, \leq) un reticolo booleano ed x ed y due elementi di L . Verificare i seguenti fatti:

1. $x \vee y = y$ se e solo se $x \leq y$;

2. $x \wedge y = x$ se e solo se $x \leq y$;

3. $x \wedge y = 0$ se e solo se $x \wedge y' = x$.