Prova scritta di Algebra 1
7 settembre 2009

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

1. Verificare che f è iniettiva se e solo se per ogni $A' \subseteq A$ abbiamo che $A' = f^{-1}(f(A'))$.
2. Siano $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ gli insiemi delle parti di A e di B; definiamo l'applicazione $f^\star : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ dove $f^\star(B') = f^{-1}(B')$. Verificare che f è suriettiva se e solo se $f^\star$ è iniettiva.

Esercizio 2.

1. Dimostrare che, se un elemento m di un monoide M è invertibile, allora m ammette un unico inverso.
2. Dimostrare che gli elementi invertibili di un monoide M formano un sottomonoide di M.
3. Individuare gli elementi invertibili nel monoide $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

$$A = \{a + b\sqrt{5} |\, a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$

1. Si dimostri che A è un sottoanello di $\mathbb{R}$.
2. Si dimostri che $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ con $f(a + b\sqrt{5}) = [a]_5$ è un omomorfismo di anelli.
3. Individuare il nucleo $Ker(f)$ e verificare se $Ker(f)$ è un ideale primo o massimale.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, sia a un elemento di L e sia L_a il seguente sottoinsieme di L:

$$L_a = \{x \in L | x \leq a\}.$$

1. Si dimostri che $(L_a, \leq)$ è un sottoreticolo di $(L, \leq)$.
2. Si dimostri che $(L_a, \leq)$ è un reticolo complementato.