Prova scritta di Algebra 2
7 luglio 2008

Esercizio 1.

1. Individuare quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi (motivare la risposta).

   a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{60}$ b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{20}$ e $\mathbb{Z}_{60}$
   c) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{20}$ e $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{25}$
   d) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ e $\mathbb{S}_4$ (gruppo simmetrico su quattro oggetti)

2. Trovare tutti i sottogruppi del gruppo diedrale con sei elementi $\mathbb{D}_3$.

Esercizio 2. Sia A un anello con unità.

1. Sia $a \in A$ non nullo e diverso dall'unità dell'anello, verificare che se a è idempotente (cioè $a^2 = a$) allora a è un divisore dello zero.

2. Verificare che se A è booleano (tutti gli elementi di A sono idempotenti) allora $a + a = 0$ per ogni $a \in A$ e A è abeliano.

3. Se A è un anello booleano e I è un ideale primo in A, quanti elementi può contenere il quoziente A/I?

Esercizio 3.

1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

$$\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+1); \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$$

2. Trovare un estensione di $\mathbb{Z}_3$ in cui $p(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ ammette una radice.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, cioè che il complemento di $x \vee y$ è $x' \wedge y'$.

2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, dimostrare che $x = 0$ se e solo se per ogni $y \in L$ abbiamo che $y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$.