

Prova scritta di Algebra 1
7 luglio 2008

Esercizio 1. Sia X un insieme.

1. Si dimostri che se $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$ sono due funzioni suriettive allora $f \circ g : X \rightarrow X$ è una funzione suriettiva.
2. Sia $I(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è suriettiva}\}$ l'insieme delle funzioni suriettive da X in X . Si dimostri che $(I(X); \circ)$ è un monoide dove \circ indica la composizione fra funzioni.
3. Trovare un esempio in cui $(I(X); \circ)$ è commutativo e un esempio in cui $(I(X); \circ)$ non è commutativo.
4. Trovare un esempio in cui $(I(X); \circ)$ non è un gruppo.

Esercizio 2. Nell'insieme \mathbb{Z} siano definite le seguenti relazioni:

- $a \sim b$ se e solo se $a = b$ oppure a e b sono coprimi.
- $a\tau b$ se e solo se $a = b$ oppure a e b hanno un divisore in comune diverso da $+1$ e -1 .
- $a\rho b$ se e solo se per ogni p numero primo $p \setminus a \Leftrightarrow p \setminus b$

Verificare se sono relazioni di equivalenza e in caso affermativo verificare se sono compatibili con la somma ed il prodotto in \mathbb{Z} .

(con $x \setminus y$ si intende x divide y)

Esercizio 3. 1. Si dimostri che nel gruppo simmetrico su n oggetti S_n ogni ciclo di lunghezza l ha come inverso un ciclo di lunghezza l .

2. Si dimostri che $H_1 = \{1_{S_3}, (1, 2)\} \subset S_3$ è un sottogruppo di S_3 ma non è normale.
3. Si dimostri che $H_2 = \{1_{S_3}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \subset S_3$ è un sottogruppo di S_3 ed è normale in S_3 .

Esercizio 4. Sia G un gruppo e g un elemento di G ; definiamo

$$C_G(g) = \{h \in G \mid hgh^{-1} = g\}.$$

1. Verificare che $C_G(g)$ è un sottogruppo di G .
2. Verificare che l'insieme $\{hC_G(g) \mid h \in G\}$ composto dai laterali sinistri di $C_G(g)$ è in biezione con l'insieme $\{hgh^{-1} \mid h \in G\}$.