**Prova scritta di Algebra 2**
**7 aprile 2005**

**Esercizio 1.**

1. Sia $C_{10}$ il gruppo ciclico di ordine dieci; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di $C_{10}$ e per ogni sottogruppo tutti i generatori.
2. Dimostrare che un gruppo con tre elementi è ciclico.
3. Dimostrare che un gruppo con quattro elementi è abeliano.

**Esercizio 2.**

1. Sia $R$ un anello commutativo con unità e sia $a$ un elemento di $R$; dimostrare che
$$(a) = \{ra | r \in R\}$$
è un ideale di $R$ che contiene $a$. Verificare inoltre che se $J$ è un ideale di $R$ contenente $a$ allora $(a) \subseteq J$.
2. Sia $R$ un dominio Euclideo; indichiamo con $d$ il grado in $R$. Dati due elementi $a$ e $b$ in $R \setminus \{0_R\}$ dimostrare che se $b$ non è invertibile allora $d(a) < d(ab)$.

**Esercizio 3.**

1. Si consideri in $\mathbb{Z}_5[x]$ il polinomio $p(x) = x^4 + 4x^2 + 4$; si trovi un'estensione di $\mathbb{Z}_5$ in cui $p(x)$ ammette una radice e se ne indichi il grado.
2. Si costruisca un campo di cardinalità 125.

**Esercizio 4.** Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano.

1. Dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, cioè che il complemento di $x \wedge y$ è $x' \vee y'$.
2. In $L$ definiamo la seguente operazione:
$$x \triangle y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$
Si dimostri che $x \triangle y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)'$.