Prova scritta di Algebra 2
6 settembre 2006

Esercizio 1.

1. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ha caratteristica 12.
2. Sia R un anello unitario con caratteristica $m > 0$ e sia k un numero naturale tale che $k \cdot 1_R = 0_R$; dimostrare che m divide k.

Esercizio 2.

1. Trovare il polinomio minimo ed il grado su $\mathbb{Q}$ del numero reale $1 - \sqrt{3}$.
2. Si dimostri che $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2 + 1)$ è un campo con 49 elementi.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$$A = \{a + b\sqrt{6} |\, a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$
$$B = \{6n + m\sqrt{6} |\, n,\, m \in \mathbb{Z}\}$$

1. Si dimostri che A è un sottoanello di $\mathbb{R}$.
2. Si simostri che B è un ideale in A.
3. Si dimostri che A/B è isomorfo all'anello $\mathbb{Z}_6$. L'ideale B è massimale o primo in A?(giustificare la risposta)

Esercizio 4.

1. Dimostrare che in un reticolo distributivo e limitato se un elemento ha un complemento allora tale complemento è unico.
2. Mostrare un esempio di un reticolo limitato in cui un elemento ammette due distinti complementi.