Prova scritta di Algebra 1
6 luglio 2009

Risolvere i **quattro** esercizi proposti **motivando** adeguatamente le risposte.

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ funzione biettiva}\}$ l'insieme delle funzioni biettive da X in se stesso.

1. Si dimostri che la composizione di due funzioni in $S(X)$ è ancora una funzione biettiva.

2. Se $\circ$ indica la composizione di funzioni si dimostri che $(S(X), \circ)$ è un gruppo.

3. Sia Y un altro insieme e sia $g : X \to Y$ una funzione biettiva; si dimostri che $(S(X), \circ)$ e $(S(Y), \circ)$ sono due gruppi isomorfi.

Esercizio 2.

1. Sia C_{12} il gruppo ciclico di ordine dodici; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di C_{12} e per ogni sottogruppo tutti i generatori.

2. Sia C un gruppo ciclico qualsiasi, dimostrare che un quoziente di G rispetto ad un suo sottogruppo è ancora un gruppo ciclico.

3. Nel caso di C_{12} quali gruppi ciclici possiamo ottenere come quozienti?

Esercizio 3. Sia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ il campo dei numeri razionali con le usuali operazioni.

1. Sia S_1 l'insieme dei numeri razionali che possono essere rappresentati da una frazione il cui denominatore è un intero che è potenza di due (compreso $1 = 2^0$), verificare che S_1 è un sottoanello di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

2. Il sottoanello S_1 è un sottocampo di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$?

3. Il sottoanello S_1 è un ideale di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

4. Sia S_2 l'insieme dei numeri razionali che possono essere rappresentati da una frazione il cui denominatore è 1, 2 o 4, verificare se S_2 è un sottoanello di $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Esercizio 4. Sia $(L, \leq)$ un reticolo distributivo ed a un elemento fissato di L e sia $\phi : L \to L$ l'applicazione definata da $\phi(x) = x \vee a$. Dimostrare che ϕ è un omomorfismo di reticoli. Si dimostri poi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. l'applicazione ϕ è un isomorfismo di reticoli;

2. il reticolo L ammette minimo e a è il minimo di L;

3. l'applicazione $\phi : L \to L$ è l'applicazione identica.