Prova scritta di Algebra 2
6 febbraio 2006

Esercizio 1.

1. Sia C_{12} il gruppo ciclico di ordine dodici; fissato un generatore, individuare i sottogruppi di C_{12} e per ogni sottogruppo tutti i generatori.

2. Sia C un gruppo ciclico e A e B due suoi sottogruppi. Consideriamo la seguente proprietà:

   (P) Se $A \cap B = \{e\}$ allora $A = \{e\}$ o $B = \{e\}$.

   Provare che

   (a) se C è infinito allora P è vera;
   (b) se C è finito di ordine 27 allora P è vera;
   (c) se C è finito di ordine 15 allora P è falsa.

Esercizio 2. Sia $f : R \to S$ un omomorfismo di anelli.

1. Si provi che se J è un sottoanello di R allora $f(J)$ è un sottoanello di S.

2. Si provi che se I è un ideale di R allora $f(I)$ è un ideale di $f(R)$.

3. Si trovi un esempio in cui I è un ideale di R ma $f(I)$ non è un ideale di S.

Esercizio 3.

1. Si consideri in $\mathbb{Z}_3[x]$ il polinomio $p(x) = x^4 + 2x^2 + 1$; si trovi un'estensione di $\mathbb{Z}_3$ in cui $p(x)$ ammette una radice e se ne indichi il grado.

2. Si costruisca un campo di cardinalità 125.

Esercizio 4.

1. Sia $(L, \leq)$ un reticolo distributivo e limitato; fissato $a \in L$ definiamo $\phi : L \longrightarrow L$ con $\phi(x) = x \vee a$. Si dimostri che ϕ è iniettiva se e solo se a è il minimo di L.

2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano, dimostrare che per ogni $x, y \in L$ abbiamo che $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, cioè che il complemento di $x \vee y$ è $x' \wedge y'$.