Prova scritta di Algebra 1
6 febbraio 2006

Esercizio 1. Sia $f : A \to B$ un'applicazione.

1. Verificare che f è suriettiva se e solo se per ogni $B' \subseteq B$ abbiamo che $B' = f(f^{-1}(B'))$.

2. Siano $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ gli insiemi delle parti di A e di B; definiamo l'applicazione $f^\star : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ dove $f^\star(B') = f^{-1}(B')$. Verificare che f è suriettiva se e solo se $f^\star$ è iniettiva.

Esercizio 2. Nell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si definisca un'operazione $\star$ ponendo

$$(a, b) \star (c, d) = (a \cdot c, a \cdot d + b)$$

per ogni (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Si dimostri che $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \star)$ è un monoide.

2. Individuare gli elementi invertibili di $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \star)$.

3. Si dimostri che $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a = 1\}$ è un sottomonoide di $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \star)$.

Esercizio 3. Si consideri in S_6 la permutazione $\tau = (1, 2, 4)(5, 6)$.

1. Si calcolino il segno, le orbite, la scomposizione in cicli disgiunti e una scomposizione in trasposizioni delle seguenti permutazioni τ, τ^2, τ^3.

2. Si verifichi se in S_6 esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^3$.

3. Si verifichi se in S_6 esiste una permutazione μ tale che $\mu\tau\mu^{-1} = \tau^5$.

Esercizio 4. Sia G un gruppo, sia $\sim$ la relazione in G definita nel seguente modo

$$g \sim g' \text{ se e solo se esiste } h \in G \text{ tale che } hgh^{-1} = g'$$

1. Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

2. Dimostrare che $\sim$ è compatibile con l'operazione in G se e solo se G è abeliano.