Prova scritta di Algebra 2
6 aprile 2004

Esercizio 1. 1. Individuare quali delle seguenti coppie sono costituite da due gruppi isomorfi (motivare la risposta).

a) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_4$ b) $\mathbb{Z}_{36}$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$
c) $\mathbb{Z}_{24}$ e $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ d)$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{D}_4$ (gruppo diedrale di ordine 8)

2. Siano n ed m due interi maggiori o uguali a 2. Dimostrare che l'elemento $([1]_n, [1]_m)$ in $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ha ordine uguale al minimo comune multiplo di n ed m.

Esercizio 2. Sia A un anello commutativo. Dati due ideali I e J di A, si consideri il sottoinsieme

$$I : J = \{a \in A | ax \in J, \forall x \in I\}.$$

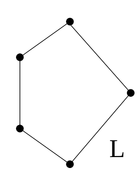
1. Dimostrare che $I : J$ è un ideale di A che contiene J;
2. dimostrare che se $I \subseteq J$, allora $I : J = A$;
3. dimostrare che se $I \not\subseteq J$ e J è primo allora $I : J = J$.

Esercizio 3. 1. Verificare quali dei seguenti quozienti sono campi:

$$\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x + 1); \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + 2x); \quad \mathbb{Z}_3[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$$

2. Si considerino in $\mathbb{Q}[x]$ gli ideali $(x^3 - 3x + 1)$ e $(x^2 - 1)$; si calcoli un generatore dell'ideale somma $I = (x^3 - 3x + 1) + (x^2 - 1)$.

Esercizio 4. 1. Sia $(L, \leq)$ il reticolo limitato rappresentato dal seguente diagramma; si dimostri che ogni elemento di L ammette almeno un complemento ma che il complemento può non essere unico.



2. Sia $(L, \leq)$ un reticolo booleano e siano $x, y \in L$; dimostrare che $x \wedge y = 0$ se e solo se $x \wedge y' = x$.